CHAPTER 1 : REVISION

ลำดับของจำนวนจริง คือ ฟังก์ชันจาก N ไป R หรือ จาก N_k ไป R

โดยที่ N = เซตของจำนวนนับ = {1, 2, 3, ...}

N_k = เซตของจำนวนนับ k ตัวแรก = {1, 2, 3, ..., k}

R = เซตของจำนวนจริง

ถ้า $f : N \longrightarrow R$ เราจะเรียก f ว่าเป็น ลำดับอนันต์

ถ้า $f : N_k \longrightarrow R$ เราจะเรียก f ว่าเป็น ลำดับจำกัด

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence, Arithmetic Progression)

- ลำดับจำกัด $a_1, a_2, ..., a_k$ เป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ

  $a_{n+1} - a_n = d$ (ค่าคงตัว) เมื่อ n = 1, 2, ..., k-1
- ลำดับอนันต์ $a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...$ เป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ

  $a_{n+1} - a_n = d$ (ค่าคงตัว) เมื่อ n = 1, 2, 3, ...

ค่าคงตัว d เรียกว่า ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต (common difference)

- ถ้า a_n แทนพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต แล้ว จะได้ว่า

  $a_n = a_1 + (n-1)d$

  เมื่อ n = 1, 2, 3, ... โดยที่ a_1 แทนพจน์แรก และ d แทนผลต่างร่วม
- ถ้า a, b, c เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว จะเรียก b ว่าเป็น ตัวกลางเลขคณิต ของ a และ c

$$b = \frac{a+c}{2}$$

- ถ้า $a, b_1, b_2, ..., b_n, c$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว จะเรียก $b_1, b_2, ... b_n$ ว่าเป็น ตัวกลางเลขคณิต n จำนวน ระหว่าง a และ c

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence, Geometric Progression)

- ลำดับจำกัด $a_1, a_2, ..., a_k$ เป็น ลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ

  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (ค่าคงตัว) เมื่อ n = 1, 2, ..., k-1
- ลำดับอนันต์ $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิต

  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (ค่าคงตัว) เมื่อ n = 1, 2, 3, ...

ค่าคงตัว r เรียกว่า อัตราส่วนร่วม ของลำดับเรขาคณิต (common ratio)

- พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1r^{n-1}$ เมื่อ $a_1 \neq 0$ และ $r \neq 0$
- ถ้า a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิต จะเรียก b ว่าเป็น ตัวกลางเรขาคณิต ของ a และ c

  a และ c จะต้องเป็นบวกทั้งคู่ หรือ ลบทั้งคู่ ดังนั้น ac > 0

$$b = \pm\sqrt{ac}$$

- ถ้า $a, b_1, b_2, ..., b_n, c$ เป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว จะเรียก $b_1, b_2, ..., b_n$ ว่าเป็น ตัวกลางเรขาคณิต n จำนวน ระหว่าง a และ c

ลำดับ Harmonic (Harmonic Sequence, Harmonic Progression)

a_i เป็นลำดับ Harmonic ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a_i}$ เป็นลำดับเลขคณิต

Limit ของลำดับ

- ลิมิตของลำดับ หมายถึง จำนวนเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่งลำดับอนันต์นั้นมีพจน์ a_n พุ่งเข้าหา หรือ เข้าใกล้ หรือ เท่ากับจำนวนนั้น เมื่อ n มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ($n \to \infty$)
  - ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตของลำดับ เรียกว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์ (Convergent)
    - มีลำดับเลขคณิตบางลำดับเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ เช่น d = 0 (a_1 เป็นเท่าใดก็ได้)
  - ลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตของลำดับ เรียกว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์ (Divergent)
    - ลำดับไดเวอร์เจนต์ ไม่จำเป็นที่ $a_{n+1} > a_n$ เช่น ลำดับกวัดแกว่ง $(-1)^n$
    - ลำดับเลขคณิตทุกลำดับเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ ยกเว้น a, a, a, ... (d = 0)
- ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f(n) เป็น นิพจน์ของ n โดยที่ f(n) มีค่ามากอย่างไม่มีที่สิ้นสุด หรือ น้อยอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ในขณะที่ $n \to \infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty \text{ or } \lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty\right)$ แล้ว

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{f(n)} = 0$$
- ถ้า $a_n = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว ลำดับ a_n จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจน์ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = c$
- ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ และ c เป็นค่าคงตัวแล้ว
  - ลำดับ ca_n จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

    $$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = cA$$
  - ถ้า $\otimes$ แทน $+, -, \times$

    ลำดับ $a_n \otimes b_n$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

    $$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \otimes b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \otimes \lim_{n\to\infty} b_n = A \otimes B$$

    เมื่อ
  - ถ้า $B \neq 0$

    ลำดับ $\frac{a_n}{b_n}$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

- กำหนด $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$ โดยที่ f(n) และ g(n) เป็น นิพจน์ที่อยู่ในรูปผลบวก หรือผลต่างของพจน์ n^k เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวก หรือ ศูนย์

  ให้ p = เลขชี้กำลังสูงสุดของ n ใน f(n)

  q = เลขชี้กำลังสูงสุดของ n ใน g(n)

  - ถ้า p =q แล้ว

    ลำดับ a_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

    $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\text{ส.ป.ส. ของ } n^p}{\text{ส.ป.ส. ของ } n^q}$$

  - ถ้า p < q แล้ว

    ลำดับ a_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ

    $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

  - ถ้า p > q แล้ว

    ลำดับ a_n เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

อนุกรม เป็นประโยคที่อยู่ในรูปการบวกของพจน์ทุกพจน์ในลำดับหนึ่ง

- อนุกรมที่เป็นการบวกของพจน์ทุกพจน์ในลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด
  - อนุกรมจำกัดสามารถหาผลบวกได้เสมอ
- อนุกรมที่เป็นการบวกของพจน์ทุกพจน์ในลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์
  - อนุกรมอนันต์บางอนุกรมหาผลบวกได้ และ บางอนุกรม หาผลบวกไม่ได้
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

  $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

  $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

  $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- ผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรม หมายถึง ผลบวกตั้งแต่ พจน์ที่ 1 ถึง พจน์ที่ n

  เขียนแทนด้วย $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
  - $a_1 = s_1$
  - $a_n = S_n - S_{n-1}$ เมื่อ n = 2, 3, 4, ...
- **อนุกรมคอนเวอร์เจนต์** หมายถึง อนุกรมอนันต์ที่ $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้
  - อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ เป็นอนุกรมที่หาผลบวกได้ และ ผลบวกของอนุกรม = $\lim_{n\to\infty} S_n$

📖 **อนุกรมไดเวอร์เจนต์** หมายถึง อนุกรมที่ไม่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ กล่าวคือ $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าไม่ได้

📖 **อนุกรมเลขคณิต** หมายถึง อนุกรมที่เกิดจากลำดับเลขคณิต

- $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$
- $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = 0$ และ $d = 0$
- อนุกรมเลขคณิต เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ก็ต่อเมื่อ $a_1 = 0$ และ $d_1 = 0$ ซึ่ง ผลบวก = $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

📖 **อนุกรมเรขาคณิต** หมายถึง อนุกรมที่เกิดจากลำดับเรขาคณิต

- $S_n = \begin{cases} na_1 ; r = 1 \\ a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} ; r \neq 1 \end{cases}$
- อนุกรมเรขาคณิต จะเป็น อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ก็ต่อเมื่อ -1 < r < 1 และ $\lim_{n\to\infty} S_n$ = ผลบวก = $\frac{a_1}{1-r}$

- ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว ลำดับ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ จะเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- ถ้าลำดับ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ มี $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
- ถ้าลำดับ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ มี $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว ยังสรุปไม่ได้ว่า อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ เป็น อนุกรมไดเวอร์เจนต์ หรือ อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

📖 **อนุกรม-พี** หมายถึง อนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

- ถ้า $p > 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
- ถ้า $p \leq 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

- **Ratio Test** : กำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่มีเครื่องหมายบวก (+) และ (-) สลับกันทีละพจน์ และ $a_n \neq 0$ สำหรับทุก n และ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$
    - ถ้า k < 1 อนุกรมนี้จะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
    - ถ้า k > 1 อนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
    - ถ้า k = 1 แล้ว การตรวจสอบด้วยวิธีนี้ใช้ไม่ได้

- **Comparison Test** : กำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์ไม่เป็นลบ
    - ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ที่มีพจน์ไม่เป็นลบ และ มีจำนวนเต็มบวก M ซึ่งทำให้ $a_k \leq b_k$ สำหรับทุก k > M แล้ว

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

✍ ถ้า $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนที่มีพจน์ไม่เป็นลบ และ มีจำนวนเต็มบวก M ซึ่งทำให้ $c_k \le a_k$ สำหรับทุก $k > M$ แล้ว

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์