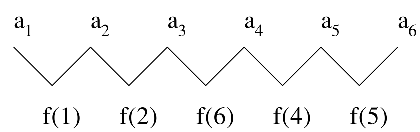
CHAPTER 2

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ เมื่อทราบพจน์ทั่วไปของผลต่างระหว่างพจน์

กำหนดให้ a_n เป็นลำดับ ที่ $a_{n+1} - a_n = f(n)$

นั่นคือ



หรือ $a_n = \begin{cases} a_1 & \text{เมื่อ } n = 1 \\ a_{n-1} + f(n-1) & \text{เมื่อ } n > 1 \end{cases}$

ได้ว่า

$$a_1 = a_1 \qquad ...(1)$$

$$a_2 - a_1 = f(1) \qquad ...(2)$$

$$a_3 - a_2 = f(2) \qquad ...(3)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1) \qquad ...(n)$$

(1)+(2)+...+(n); $\qquad a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{n-1} f(n)$

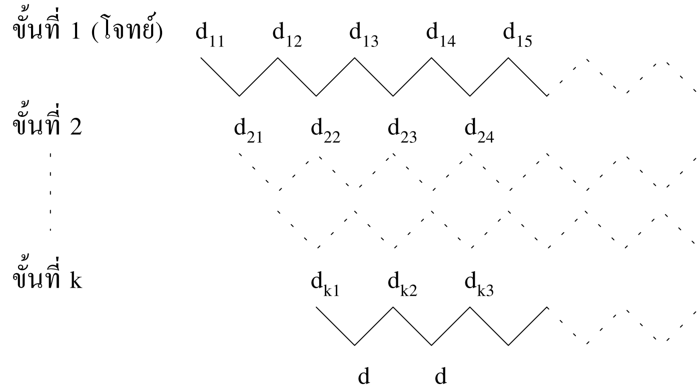
Ex จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ ซึ่ง $a_1 = 1$ และ $a_{n+1} - a_n = n^2 + n$

ตอบ $\quad a_n = 1 + \sum_{n=1}^{n-1} (n^2 + n)$

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่หาผลต่างระหว่างพจน์ไปเรื่อย ๆ แล้วได้ค่าคงตัว

(หรือได้ลำดับเลขคณิต ซึ่งหาผลต่างต่อไปก็ได้ค่าคงตัวเช่นเดียวกัน)

กำหนดให้ a_n เป็นลำดับซึ่งหาผลต่างระหว่างพจน์ไปเรื่อย ๆ แล้วได้ค่าคงตัว d ดังนี้



เราจะพิสูจน์จากขั้นที่ k ไปขั้นที่ 1

Note that $\sum_{n=1}^{n-1} (1) = \binom{n-1}{1}$ และ $\sum_{n=1}^{n-1} \binom{n-1}{r} = \binom{n-1}{r+1}$

ขั้นที่ k ; $\quad f_k(n) = d_k + \sum_{n=1}^{n-1} d$

$$= d_k + d\binom{n-1}{1}$$

ขั้นที่ k-1 ; $f_{k-1}(n) = d_{k-1} + \sum_{n=1}^{n-1} f_k(n)$

$$= d_{k-1} + \sum_{n=1}^{n-1}\left(d_k + d\binom{n-1}{1}\right)$$

$$= d_{k-1} + \sum_{n=1}^{n-1} d_k + d\sum_{n=1}^{n-1}\binom{n-1}{1}$$

$$= d_{k-1} + d_k\binom{n-1}{1} + d\binom{n-1}{2}$$

....

ขั้นที่ 1 $f_1(n) = a_n$

ได้ $$a_n = d_1 + d_2\binom{n-1}{1} + d_3\binom{n-1}{2} + \ldots + d_k\binom{n-1}{k-1} + d\binom{n-1}{k} \quad **$$

เราสามารถ simplify ** ได้ โดย

สังเกตว่า $\binom{n-1}{p}$ เป็นพหุนามตัวแปร n ดีกรี p และ

a_n มี $\binom{n-1}{k}$ ที่ทำให้เกิดพหุนามดีกรีสูงสุด

นั่นคือ จะได้ว่า a_n เป็นฟังก์ชันพหุนามตัวแปร n มีดีกรี k เมื่อหาผลต่าง k ขั้นแล้ว ได้ค่าคงตัว

สรุปแล้ว เวลาทำโจทย์ เรามีทางเลือกอยู่ 2 วิธี คือ

1. ใช้สูตร

$$a_n = d_1 + d_2\binom{n-1}{1} + d_3\binom{n-1}{2} + \ldots + d_k\binom{n-1}{k-1} + d\binom{n-1}{k}$$

2. Set ฟังก์ชันพหุนามตัวแปร n ดีกรี k แล้วแทนค่าต้น ๆ (n = 1,2,3,…,k+1) ของ a_n ลงไปเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เรา set ขึ้น

Ex จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 4, 3, 4, 7, 12, ...

แนวคิด หา 2 ขั้น แล้วได้ค่าคงตัว ดังนี้

4 3 4 7 12

-1 1 3 5

2 2 2

แนว-1 ใช้สูตร $a_n = d_1 + d_2\binom{n-1}{1} + d_3\binom{n-1}{2} + \ldots + d_k\binom{n-1}{k-1} + d\binom{n-1}{k}$

ได้ $a_n = 4 + (-1)\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} = 4 - (n-1) + (2)\dfrac{(n-1)(n-2)}{2!}$

$= 7 - 4n + n^2$

แนว-2 มี 2 ขั้น ดังนั้น $a_n = c_1n^2 + c_2n + c_3$

มี 3 ตัวแปร ต้องการ 3 สมการ

แทน n = 1 ; $a_1 = c_1 + c_2 + c_3 = 4$ ...(1)

แทน n = 2 ; $a_2 = 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 3$ ...(2)

แทน n = 3 ; $a_3 = 9c_1 + 3c_2 + c_3 = 4$ ...(3)

(2) - (1) ; $3c_1 + c_2 = -1$ ...(4)

(3) - (2) ; $5c_1 + c_2 = 1$ ...(5)

(5) - (4) ; $2c_1 = 2$

$c_1 = 1$

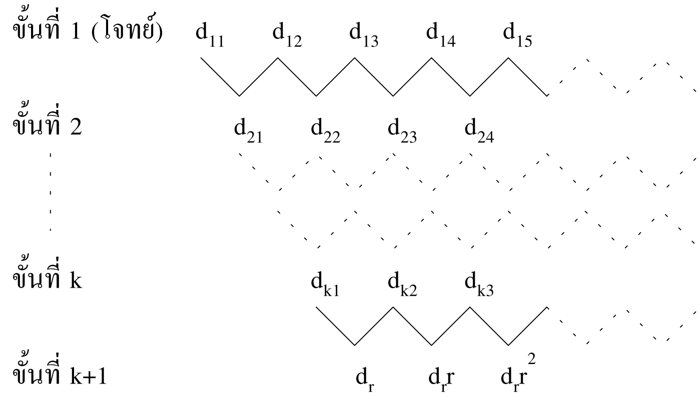
แทนค่า c_1 ใน (4) ได้ $c_2 = -1 - 3(1) = -4$

แทนค่า c_1 และ c_2 ใน (1) ได้ $c_3 = 4 - (-4) - 1 = 7$

ดังนั้น $a_n = n^2 - 4n + 7$

<u>การหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่หาผลต่างระหว่างพจน์ไปเรื่อย ๆ แล้วได้ลำดับเรขาคณิต</u>

ดังนี้



กำหนดให้ a_n เป็นลำดับซึ่งหาผลต่างระหว่างพจน์ไปเรื่อย ๆ แล้วได้ลำดับเรขาคณิต dr^{n-1}

เราจะพิสูจน์จากขั้นที่ k ไปขั้นที่ 1

Note that $\sum\limits_{n=1}^{n-1}(1) = \binom{n-1}{1}$, $\sum\limits_{n=1}^{n-1}\binom{n-1}{r} = \binom{n-1}{r+1}$ และ $\sum\limits_{i=1}^{n-1} r^{i-1} = \dfrac{r^{n-1}-1}{r-1}$

ขั้นที่ k+1 ; $f_{k+1}(n) = d_r r^{n-1}$

ขั้นที่ k ; $f_k(n) = d_k + \sum\limits_{n=1}^{n-1} d_r r^{n-1}$

$$= d_k + d_r\left(\frac{r^{n-1}-1}{r-1}\right)$$

$$= \left(d_k - \frac{d_r}{r-1}\right) + \frac{d_r}{r-1}\left(r^{n-1}\right)$$

ขั้นที่ k-1 ; $f_{k-1}(n) = \left(d_{k-1} - \dfrac{d_r}{(r-1)^2}\right) + \left(d_k - \dfrac{d_r}{r-1}\right)\dbinom{n-1}{1} + \dfrac{d_r}{(r-1)^2} r^{n-1}$

....

ขั้นที่ 1 ; $f_1(n) = a_n$

ได้ $a_n = \left(d_1 - \dfrac{d_r}{(r-1)^k}\right) + \left(d_2 - \dfrac{d_r}{(r-1)^{k-1}}\right)\dbinom{n-1}{1} + \ldots +$

$$\left(d_k - \frac{d_r}{r-1}\right)\binom{n-1}{k-1} + \frac{d_r}{(r-1)^k}\, r^{n-1}$$

Simplification $\Longrightarrow$ a_n สามารถเขียนได้ในรูป

kr^{n-1} + ฟังก์ชันพหุนามตัวแปร n ดีกรี k-1

นั่นคือ

ถ้าหาผลต่าง k ขั้น แล้ว เริ่มได้ลำดับเรขาคณิต (dr^{n-1}) จะได้ว่า $a_n = kr^{n-1} + f(n)$

เมื่อ f(n) เป็นฟังก์ชันพหุนามตัวแปร n มีดีกรี k-1

หมายเหตุ ถ้า k = 1 แล้ว f(n) = ค่าคงตัว ; ถ้า k = 0 แล้ว f(n) = 0

สรุปแล้ว เวลาทำโจทย์ เรามีทางเลือกอยู่ 2 วิธี คือ

1. ใช้สูตร

$$\left(d_1 - \frac{d_r}{(r-1)^k}\right) + \left(d_2 - \frac{d_r}{(r-1)^{k-1}}\right)\binom{n-1}{1} + \ldots +$$

$$\left(d_k - \frac{d_r}{r-1}\right)\binom{n-1}{k-1} + \frac{d_r}{(r-1)^k}\, r^{n-1}$$

2. Set $a_n = kr^{n-1} + f(n)$

เมื่อ f(n) เป็นฟังก์ชันพหุนามตัวแปร n มีดีกรี k-1

Ex จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 3, 6, 15, 42, ...

แนวคิด หา 1 ขั้น แล้วได้ลำดับเรขาคณิต ดังนี้

2 3 6 15 42

1 3 9 27

3^0 3^1 3^2 3^3

แนว-1 ใช้สูตร ได้ $a_n = \left(2 - \frac{1}{(3-1)^1}\right) + \frac{1}{(3-1)^1}3^{n-1} = \frac{3^{n-1}+3}{2}$

แนว-2 มี 1 ขั้น ดังนั้น $a_n = c_1 3^{n-1} + c_2$

มี 2 ตัวแปร ต้องการ 2 สมการ

แทน n = 1 ; $a_1 = c_1 + c_2 = 2$ ...(1)

แทน n = 2 ; $a_2 = 3c_1 + c_2 = 3$ ...(2)

(2) - (1) ; $2c_1 = 1$

$c_1 = \frac{1}{2}$

แทนค่า c_1 ใน (1) ได้ $c_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ดังนั้น $a_n = \frac{3^{n-1}+3}{2}$