CHAPTER 3

<u>การหาผลบวกของอนุกรม</u> 1

D1 หลักเบื้องต้น ที่ใช้อยู่เสมอและสำคัญมาก ในการหาผลบวกของอนุกรม คือ การแยก a_n เป็น ผลต่างของ 2 พจน์ เพื่อให้ตัดกับพจน์อื่น ต่อ ๆ ไป

Ex.
$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(i)-f(i+1)\big) = (f(1)-f(2)) + (f(2)-f(3)) + \dots + (f(n)-f(n+1))$$
$$= f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$$
$$\quad - f(2) - f(3) - f(4) - \dots - f(n+1)$$
$$= f(1) - f(n+1)$$

หรืออาจพิสูจน์โดย
$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(i)-f(i+1)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} f(i+1)$$
$$= \left(f(1) + \sum_{i=2}^{n} f(i)\right) - \left(f(n+1) + \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1)\right)$$
$$= f(n) - f(n+1)$$

Ex.
$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(i)-f(i+r)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} f(i+r)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{r} f(i) + \sum_{i=r+1}^{n} f(i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-r} f(i+r) + \sum_{i=n-r+1}^{n} f(i+r)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} f(i) - \sum_{n+1}^{n+r} f(i)$$

เทคนิคในการแยก a_n ใช้อยู่ในรูปผลต่างของ 2 พจน์

(อย่าลืมว่าเราไม่ได้ต้องการเพียงแค่แยกให้เป็น 2 พจน์เฉย ๆ แต่ต้องการให้ 2 พจน์ที่แยกออกมาได้นั้นสัมพันธ์กันในรูปของ f(i) กับ f(i+1) ด้วย)

มีอยู่หลายวิธีด้วยกัน เช่น

แยกโดย ตัด พจน์ย่อยตัวหน้า กับ ตัด พจน์ย่อยตัวหลัง

Ex
$$a_n = \frac{1}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\right)$$

ในกรณีนี้ จะต้อง check ว่า a = ? ซึ่ง a ต้องเป็นค่าคงตัว ไม่ติด n

เนื่องจาก $\dfrac{1}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)} - \dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$
$$= \frac{(n+3)-(n)}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{3}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$$

$\therefore$ a = 3 จึงจะได้ $\dfrac{1}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$ เท่าเดิม

นั่นคือ
$$\frac{1}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\right)$$

Ex $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$= \left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1-\dfrac{1}{n+1}$

$= \dfrac{n}{n+1}$

Ex $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)+\ldots$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\ldots\right)$

$= \dfrac{1}{3}$

Ex $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\cdot 3}-\dfrac{1}{3\cdot 4}\right)+\ldots$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{4}$

$\sum\limits_{n=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots a_{n+r}}\right)$ **เมื่อ a_n เป็นลำดับเลขคณิต**

เนื่องจาก $\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots a_{n+r}}$

$= \dfrac{1}{a_{n+r}-a_n}\left(\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+r-1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots a_{n+r}}\right)$

$= f(n)-f(n+1)$

แต่ $\forall n$; a_{n+r}-a_n $= \left(a_1+(n+r-1)d\right)-\left(a_1+(n-1)d\right)$

$= rd = a_{1+r}$-a_1

ดังนั้น

$\sum\limits_{n=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots a_{n+r}}\right)$

$= \dfrac{1}{rd}\left(\dfrac{1}{a_1\cdot a_2\cdots a_r}-\dfrac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots a_{n+r}}\right)$; อาจใช้ $rd = a_{1+r}$-a_1

Ex $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

$= \dfrac{1}{4-1}\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{1}{18}$

Ex $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ = f(n) - f(n+2) ; $f(n)=\dfrac{1}{2n}$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right) = \sum\limits_{n=1}^{n}\left(f(n)-f(n+2)\right)$

$= f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$

$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

การคูณเพิ่มด้วย ผลต่างของ พจน์ย่อยก่อนหน้า กับ พจน์ย่อยถัดไป

Ex $\sum_{n=1}^{6}\left((2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)\right)$

$= (1)(3)(5) + (3)(5)(7) + (5)(7)(9) + ... + (11)(13)(15)$

เนื่องจาก

$(2n-1)(2n+1)(2n+3)$

$= \frac{(2n+5)-(2n-3)}{(2n+5)-(2n-3)}\cdot(2n-1)(2n+1)(2n+3)$

$= \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)-(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{8}$

$= f(n+1) - f(n)$; $f(n) = \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{8}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{6}\left((2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)\right)$

$= f(n+1) - f(1) = f(7) - f(1)$

$= \frac{11\cdot 13\cdot 15\cdot 17-(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{8} = 4560$

$\sum_{n=1}^{n}\prod_{k=n}^{n+k-1} b_k$; b_k เป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วม = d

$a_n = \prod_{k=n}^{n+k-1} b_k = (b_n)(b_{n+1})...(b_{n+k-1})$

$= \left(\frac{b_{n+k}-b_{n-1}}{b_{n+k}-b_{n-1}}\right)(b_n)(b_{n+1})...(b_{n+k-1})$

$= \frac{1}{b_{n+k}-b_{n-1}}[(b_{n+k})(b_{n+k-1})...(b_n) - (b_{n+k-1})...(b_n)(b_{n-1})]$

$= f(n+1) - f(n)$; $f(n) = \frac{(b_{n+k-1})\cdot(b_{n+k-2})\cdot\ldots\cdot(b_n)\cdot(b_{n-1})}{b_{n+k}-b_{n-1}}$

$S_n = f(n+1) - f(1)$

$= \frac{1}{b_{n+k}-b_{n-1}}[(b_{n+k})(b_{n+k-1})...(b_n) - (b_k)...(b_1)(b_0)]$; $b_0 = b_1-d$

Ex $(5)(7)(9) + (7)(9)(11) + ... + (21)(23)(25)$

$= \frac{1}{11-3}\cdot(27\cdot 25\cdot 23\cdot 21-9\cdot 7\cdot 5\cdot 3)$

$= 40635$

Ex $\sum_{n=1}^{n} n(n+3)(n+4)$

$= \sum_{n=1}^{n}(n+2-2)(n+3)(n+4)$

$= \sum_{n=1}^{n}(n+2)(n+3)(n+4) - 2\sum_{n=1}^{n}(n+3)(n+4)$

$= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)-5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4}$

$-2\frac{(n+5)(n+4)(n+3)-5\cdot 4\cdot 3}{3}$

Ex $\sum_{n=1}^{n}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$= \sum_{n=1}^{n}(n+1)(n+2)\left((n)+(n+3)\right)$

$= \sum_{n=1}^{n}n(n+1)(n+2)+\sum_{n=1}^{n}(n+1)(n+2)(n+3)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+$

$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-1\cdot2\cdot3\cdot4}{4}$

หรือ อาจทำโดย

$= \sum_{n=1}^{n}(n+1)(n+2)\left((2n)+(3)\right)$

$= 2\sum_{n=1}^{n}n(n+1)(n+2)+3\sum_{n=1}^{n}(n+1)(n+2)$

$= 2\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$+3\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-1\cdot2\cdot3}{3}$

การหาผลบวกอนุกรมเรขาคณิตโดยแยกเป็น 2 พจน์

$a_n = a_1r^{n-1} = (a_1)\left(r^{n-1}\right)\left(\frac{r-1}{r-1}\right) = a_1\cdot\frac{r^n-r^{n-1}}{r-1} = \frac{a_1\cdot r^n}{r-1}-\frac{a_1\cdot r^{n-1}}{r-1}$

$= f(n+1) - f(n)\ ;\ f(n) = \frac{a_1\cdot r^{n-1}}{r-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{n}a_n = f(n+1) - f(1) = \frac{a_1\cdot r^{(n+1-1)}}{r-1}-\frac{a_1\cdot r^{(1-1)}}{r-1} = a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$

Ex $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{3^n}$

$a_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{2} = f(n) - f(n+1)\ ;\ f(n) = \frac{1}{2\cdot3^{n-1}}$

$S_n = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3^n}$

การแยกส่วนออกเป็น 2 กลุ่ม (นำค่าคงที่คูณ เพื่อกำจัดค่าที่ไม่ต้องการ)

Ex $\sum_{n=1}^{n}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$\because \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} = f(n)-f(n+1);\quad f(n) = \frac{1}{n^2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{n}\left(f(n)-f(n+1)\right) = f(1)-f(n+1) = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

Ex $\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{2n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}\right)$

$a_n = \frac{2n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}$

ให้ $a_n = \left(\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n+1}\right)\frac{1}{3^n} = \left(\frac{k_1(n+1)+k_2n}{n(n+1)}\right)\frac{1}{3^n}$

หาค่า k_1 และ k_2 ที่ทำให้ $2n+3 = k_1(n+1) + k_2n$

แทนค่า $n = 0$; ได้ $k_1 = 3$

แทนค่า $n = -1$; ได้ $k_2 = -1$

ดังนั้น $a_n = \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{3^n}$ = f(n) - f(n+1) ; $f(n) = \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}$

S_n = f(1) - f(n+1) = $1 - \frac{1}{(n+1)3^n}$

อื่น ๆ

Ex $\sum_{n=1}^{n} \frac{n}{(n+1)!}$

$a_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ = f(n) - f(n+1) ; $f(n) = \frac{1}{n!}$

S_n = f(1) - f(n+1) = $1 - \frac{1}{(n+1)!}$