CHAPTER 4

การหาผลบวกของอนุกรม 2

D2 การเปลี่ยน พหุนามตัวแปร n ให้อยู่ในรูปที่ต้องการ

เราสามารถเปลี่ยนแปลงโจทย์ที่ปรากฏในรูปอนุกรมของเศษส่วน ที่เศษไม่ใช่ 1 ให้อยู่ในรูปที่เราสามารถใช้ **D1** แก้ปัญหาได้

เทคนิคในการเปลี่ยนก็คือ เปลี่ยนให้สามารถตัดกับส่วนได้ เพื่อเวลาเอาส่วนกระจายแจกเศษทุกกลุ่มแล้ว จะได้ทุก ๆ กลุ่ม มีเศษ เป็น 1

การเปลี่ยน อาจทำโดยค่อย ๆ ทำทีละพจน์ หรือ ใช้การสมมติตัวแปรช่วย

Ex จงหา $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

เราอาจเปลี่ยน $(n+1)^2$ โดย

วิธีที่ 1 $(n+1)^2 = (n+1)(n+1) = n(n+1) + (n+1) = n(n+1) + n + 1$

วิธีที่ 2 $(n+1)^2 = k_1(n)(n+1) + k_2n + k_3$

แทน $n = 0$; $1 = k_3$

แทน $n = 1$; $4 = 2k_1 + k_2 + k_3$

แทน $k_3 = 1$; $4 = 2k_1 + k_2 + 1$

$2k_1 + k_2 = 3$ ...(1)

แทน $n = 2$; $9 = 6k_1 + 2k_2 + k_3$

แทน $k_3 = 1$; $9 = 6k_1 + 2k_2 + 1$

$6k_1 + 2k_2 = 8$ ...(2)

(2) - 2×(1) $2k_1 = 2$

$k_1 = 1$

แทน $k_1 = 1$ ใน (1) $3 = 2(1) + k_2$

$k_2 = 1$

ดังนั้น $(n+1)^2 = n(n+1) + n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)+n+1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{17}{36}$$

Ex

D3 การเติม

ถ้าเจอเศษส่วนที่พจน์ข้างล่างอยู่ในรูปที่ดูเหมือนขาดหายไป อาจต้องมีการเติม โดยคูณพจน์ที่ดูเหมือนขาดหายไปทั้งเศษและส่วน แล้วใช้ **D1** และ **D2** แก้ปัญหา

Ex $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$

แนวคิด
$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{n+2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$
$$= \frac{7}{36} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

D4 ตั้งสมการ & คูณแล้วลบ

การหาผลบวกของอนุกรมที่อยู่ในรูปเศษส่วน โดยเศษเป็นฟังก์ชันพหุนามตัวแปร n และส่วนเป็นลำดับเรขาคณิต

ให้นำ อัตราส่วนร่วม หรือ ส่วนกลับของมัน คูณตลอด แล้วนำไป ลบออกจาก หรือ ลบออกด้วย ผลบวกเดิม ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะอยู่ในรูปที่สามารถหาผลบวกได้

Ex $\quad 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + 3\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots + n\cdot\frac{1}{3^n} + \ldots$

ให้ $\quad S = 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + 3\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots + n\cdot\frac{1}{3^n} + \ldots \qquad ...(1)$

$\quad 3S = 1 + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3^2} + \ldots + n\cdot\frac{1}{3^{n-1}} + \ldots \qquad ...(2)$

(2) - (1) ; $\quad 2S = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right)$

$$2S = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

ดังนั้น $\quad S = \frac{3}{4}$

D5 การประยุกต์การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกับการหาผลบวกของอนุกรม

ให้ $|x| < 1$

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = (2)(1) + (3)(2)x + (4)(3)x^2 + \ldots = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big((n)(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)\big)x^{n-1} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} \text{ เมื่อ } r > 1$$

Ex $1\cdot 2+\frac{2\cdot 3}{3}+\frac{3\cdot 4}{3^2}+\frac{4\cdot 5}{3^3}+\cdots = \frac{1\cdot 2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{4}$

Ex $1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+3\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots$

$= \frac{1}{3}\left(1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \frac{3}{4}$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^{n-1}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)-2n}{2^{n-1}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$

$= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}-2\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$ = 16 - 2(4) = 8

D6 การแก้อนุกรมที่เป็น ( ) บวกกัน มีหลักทั่วไปว่า ให้หาพจน์ทั่วไปของแต่ละวงเล็บ แล้วใส่ Σ

Ex 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + ...

a_n = 1+2+3+...+n = $\frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Ex 1 + (1+2+3) + (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5+6+7) + ...

a_n = 1+2+3+...+(2n-1)

$= \frac{2n-1+1}{2}\cdot(2n-1)$ = (n)(2n-1) = 2n(n+1) - 3n

$S_n = \frac{2}{3}(n)(n+1)(n+2)-\frac{3}{2}(n)(n+1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

Ex 1 + (2+3+4) + (3+4+5+6+7) + (4+5+6+7+8+9+10) + ...

a_n = n + (n+1) + ... + (3n-2)

$= \left((3n-2)-n+1\right)\cdot\left(\frac{n+(3n-2)}{2}\right)$

$= (2n-1)^2 = 4n^2-4n+1 = 4(n)(n+1) - 8n + 1$

$S_n = \frac{4(n)(n+1)(n+2)}{3}-\frac{8(n)(n+1)}{2}+n$

$= \frac{n(4n^2+3n-4)}{3}$