CHAPTER 6

GENERATING FUNCTION 1

ให้ $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

generating function ของ ลำดับ $\{a_n\}$ คือ $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$

ให้ $\{b_n\} = b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$

generating function ของ ลำดับ $\{b_n\}$ คือ $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$

เมื่อเราศึกษา generating function เราจะสนใจ a_i ซึ่งเรียกว่า สัมประสิทธิ์ของ x^i เราจะไม่สนใจว่า x ตัวไหนซึ่งทำให้อนุกรมกำลัง (power series) ลู่เข้า

Ex $A(x) = (1+x)^n$ เป็น generating ของลำดับ C(n,0), C(n,1), C(n,2), ...

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n = 1 + rx + r^2x^2 + \ldots = \frac{1}{1-rx}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} x^r$$

$$= 1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\binom{n+2}{3}x^3+\ldots$$

อาจพิสูจน์ได้โดย สำหรับ x^r

ต้องการแบ่งของเหมือน r ชิ้น ให้เป็น n กลุ่ม

ต้องการตัวแบ่ง n-1 อัน รวมแล้วให้มีตำแหน่งทั้งหมด r+n-1 ตำแหน่ง ต้องการเลือกที่มาเติมตัวแบ่ง n-1 อัน ได้ $\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}$

แทนอนุพันธ์ของ A(x) ด้วย $\frac{d}{dx}A(x)$

$$\frac{d}{dx}\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x)A'(x)-A(x)B'(x)}{B^2(x)}$$

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{1-x} = a_0+(a_0+a_1)x+\ldots+\sum_{i=0}^{n}a_ix^n+\ldots$$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$; $a_n = n+1$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$; $a_n = n$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)x^n\right) = 1x + (1+2)x^2 + (1+2+3)x^3 + \ldots$; $a_n = \sum_{n=1}^{n} n$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}nx^n}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^3}$$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots$; $a_n = (n+1)^2$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^2 + \ldots$; $a_n = n^2$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)x^n\right) = 1^2x + (1^2+2^2)x^2 + (1^2+2^2+3^2)x^3 + \ldots$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{2x^2}{(1-x)^4}$$

Ex จงหา $1+2+\ldots+n$

แนวคิด $1x + (1+2)x^2 + (1+2+3)x^3 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^3}$

$1+2+3+\ldots+n =$ สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\frac{x}{(1-x)^3}$

$=$ สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ใน $\frac{1}{(1-x)^3}$

$$= \binom{n-1+3-1}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

Ex จงหา $1^2+2^2+\ldots+n^2$

แนวคิด $1^2x + (1^2+2^2)x^2 + (1^2+2^2+3^2)x^3 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{2x^2}{(1-x)^4}$

$1^2+2^2+\ldots+n^2 =$ สัมประสิทธิ์ ของ x^n ใน $\frac{x}{(1-x)^3} + \frac{2x^2}{(1-x)^4}$

สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\frac{x}{(1-x)^3}$ $=$ สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ใน $\frac{1}{(1-x)^3}$

$$= \binom{n-1+3-1}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\frac{2x^2}{(1-x)^4}$ $=$ 2 เท่าของ สัมประสิทธิ์ของ x^{n-2} ใน $\frac{1}{(1-x)^4}$

$$= 2\cdot\binom{n-2+4-1}{n-2} = 2\cdot\binom{n+1}{n-2}$$

$$\therefore\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \binom{n+1}{n-1} + 2\cdot\binom{n+1}{n-2}$$

Ex ให้ $n \in N-\{1\}$ จงหา $(3)(2)(1)+(4)(3)(2)+\ldots+(n+1)(n)(n-1)$

แนวคิด จาก $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\ldots$

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$$

$$= 1+2x+3x^2+\ldots$$

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-2} = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$= (2)(1)+(3)(2)x+(4)(3)x^2+\ldots$$

$$\frac{d}{dx}2(1-x)^{-3} = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 6(1-x)^{-4}$$

$$= (3)(2)(1)+(4)(3)(2)x+...$$

$$6x^2(1-x)^{-4} = 0+(0)x+(3)(2)(1)x^2+(4)(3)(2)x^3+...$$

$$6x^2(1-x)^{-5} = 0+(0+0)x+(3\cdot2\cdot1)x^2+(3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2)x^3+...$$

$(3)(2)(1)+(4)(3)(2)+...+(n+1)(n)(n-1)$

= สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $6x^2(1-x)^{-5}$

= สัมประสิทธิ์ของ x^{n-2} ใน $6(1-x)^{-5}$

$$= 6\cdot\binom{n-2+5-1}{5-1} = 6\cdot\binom{n+2}{4}$$

Ex $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\ldots$

แนวคิด $\dfrac{2}{(1-x)^3} = (1)(2)+(2)(3)x+(3)(4)x^2+..$

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = (1)(2)x^2+(2)(3)x^3+(3)(4)x^4+...$$

$$\frac{d}{dx}\frac{2x^2}{(1-x)^3} = (1)(2)^2x+(2)(3)^2x^2+(3)(4)^2x^3+...$$

$$= \frac{(1-x)^3(2)(2x)-2x^2(3)(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6}$$

$$= \frac{4x}{(1-x)^3}+\frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

$$\frac{4x}{(1-x)^4}+\frac{6x^2}{(1-x)^5} = \left(1\cdot2^2\right)x+\left(1\cdot2^2+2\cdot3^2\right)x^2+\ldots$$

$1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\ldots$

= สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\dfrac{4x}{(1-x)^4}+\dfrac{6x^2}{(1-x)^5}$

$$= 4\cdot\binom{n-1+4-1}{n-1}+6\cdot\binom{n-2+5-1}{n-2}$$

$$= 4\cdot\binom{n+2}{n-1}+6\cdot\binom{n+2}{n-2}$$