CHAPTER 7

GENERATING FUNCTION 2

การใช้ generating function แก้ recurrence relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=a}^{\infty} a_{n-a} x^{n-a} = A(x)$$

หลัก

take $\sum_{n=b}^{\infty} x^n$ เมื่อ ปรากฏ a_{n-k} และ $b = k_{max}$

$$\sum_{n=b}^{\infty} a_{n-a} x^n = x^a \sum_{n=b}^{\infty} a_{n-a} x^{n-a}$$
$$= x^a\left(A(x) - \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{b-a+1} x^{b-a-1}\right)\right)$$
$$\left(a_{n-a} \Rightarrow x^a\left(A(x) - \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{b-a+1} x^{b-a-1}\right)\right)\right)^{**}$$

$\sum_{n=b}^{\infty} n^k x^n$; $0 \le k$ ให้เปลี่ยนอยู่ในรูป $\frac{B(x)}{(1-x)^m}$ โดยใช้วิธีเดียวกับบทที่แล้ว

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

หาสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน A(x)

$$\frac{x^a}{(1-x)^k} = x^a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1-a}{n-a} x^n$$
$$\frac{x}{(1-x)^k} = x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1-1}{n-1} x^n$$

โดย $r < 0 \rightarrow \binom{n}{r} = 0$

Ex ให้ $a_0 = 1$ และ $a_n = a_{n-1} + n$; $(n > 0)$

จงหา a_n ในรูปแบบชัดเจน

แนวคิด ให้ A(x) เป็น generating function ของ $\{a_n\}$ สำหรับ $n > 0$

เราได้ว่า $a_n x^n = (a_{n-1}+n)x^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + n) x^n$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + n) x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$A(x) - a_0 = xA(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$ แทน $a_0 = 1$

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3}$$

a_n = สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน A(x)

$$= 1+\binom{n-1+3-1}{n-1}$$

$$= 1+\binom{n+1}{n-1} = 1+\binom{n+1}{2}$$

Ex $b_n = 3^{n-1} - b_{n-1}$; $b_0 = 0$

แนวคิด $b_n = 3^{n-1} - b_{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n$$

$$B(x) - b_0 = x\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^{n-1} - x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1}$$

แทน $b_n = 0$; $B(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$= \frac{x}{1-3x} - xB(x)$$

$$= \frac{x}{(1-3x)(1+x)}$$

$$= \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+x}$$

หาค่า A และ B ที่ทำให้ $(1+x)A + (1-3x)B = x$

แทน $x = -1$; $B = -\frac{1}{4}$

แทน $x = \frac{1}{3}$; $A = \frac{1}{4}$

นั่นคือ $B(x) = \frac{1}{4(1-3x)} - \frac{1}{4(1+x)}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)\right)x^n\right)$$

$$b_n = \frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)$$

Ex $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$; $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 3x\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - 3x^2\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + x^3\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-3}$$

$$A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2 = 3x[A(x)-a_0-a_1x] - 3x^2[A(x)-a_0] + x^3A(x)$$

แทน $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$

$$A(x) -1 -x -2x^2 = 3xA(x) -3x -3x^2 - 3x^2A(x) +3x^2 + x^3A(x)$$

$$A(x)[1-3x+3x^2-x^3] = 2x^2 -2x +1$$

$$A(x) = \frac{2x^2-2x+1}{(1-x)^3}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n $= 2\cdot\binom{n-2+3-1}{n-2} - 2\cdot\binom{n-1+3-1}{n-1} + \binom{n+3-1}{n}$

$$= \frac{n^2-n+2}{2}$$

Ex $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$A(x)-a_0-a_1x = 4x[A(x)-a_0] - 4x^2[A(x)] \quad ; b=2$$

แทนค่า $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$A(x)-x = 4xA(x) - 4x^2A(x)$$

$$A(x) = \frac{x}{1-4x+4x^2}$$

$$= \frac{x}{(1-2x)^2}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n = สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ใน $\frac{1}{(1-2x)^2}$

$$= 2^{n-1}\cdot\binom{n-1+2-1}{n-1}$$

$$= n\cdot 2^{n-1}$$

Ex $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$A(x)-a_0-a_1x = 4x[A(x)-a_0)] - 3x^2A(x)$$

แทนค่า $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$A(x)-x = 4xA(x) - 3x^2A(x)$$

$$A(x) = \frac{x}{1-4x+3x^2} = \frac{a}{1-3x}+\frac{b}{1-x}$$

หาค่า a และ b ที่ทำให้ $a(1-x) + b(1-3x) = x$

แทนค่า $x = 1$; $b = -\frac{1}{2}$

แทนค่า $x = \frac{1}{3}$; $a = \frac{1}{2}$

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-3x}-\frac{1}{1-x}\right)$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n = $\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$

Ex $a_n = 2a_{n-1} + 1$; $a_0 = 0$

$$A(x)-a_0 = 2xA(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

แทนค่า $a_0 = 0$

$$A(x) = 2xA(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x}+\frac{b}{1-2x}$$

$$a(1-2x) + b(1-x) = x$$

แทน $x = 1$; $a = -1$

แทน $x = \frac{1}{2}$; $b = 1$

$$A(x) = \frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n = 2^n-1

Ex $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$; $a_0 = 0$

$$A(x)-a_0 = 2xA(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$$

$$A(x)-a_0 = 2xA(x) + \frac{1}{1-2x} - 1$$

แทน $a_0 = 0$; $\quad A(x) = \dfrac{2x}{(1-2x)^2}$

สัมประสิทธิ์ของ x^n $= 2($สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ใน $\dfrac{1}{(1-2x)^2})$

$$= 2\cdot\binom{n-1+2-1}{n-1}\cdot 2^{n-1}$$

$$= n\cdot 2^n$$