CHAPTER 9

แบบฝึกหัด

A ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย (ThMo) ปี 33-38

B ข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 2,3,4

C ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ปี 20-38

D ข้อสอบแข่งขันทางวิศวะ

Ex $1 + (2+3) + (4+5+6) + (7+8+9+10)$

เนื่องจากตัวเลขภายในวงเล็บต่อกัน ดังนั้น หาว่า ตัดสุดท้ายของวงเล็บสุดท้ายเป็นเท่าใด โดยใช้การหาพจน์ทั่วไป ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้ว

โดย หา พจน์ทั่วไปของลำดับของตัวสุดท้ายของแต่ละวงเล็บ

1 3 6 10 15

2 3 4 5 $\Rightarrow$ n+1

$$a_n = 1 + \sum_{n=1}^{n-1}(n+1)$$
$$= 1 + \frac{n-1}{2}\cdot(n+1+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$$

Ex $1 + (2+3+4) + (5+6+7+8+9) + (10+11+12+13+14+15+16) + \ldots$

เลขต่อกัน หาพจน์ทั่วไปของตัวสุดท้ายของแต่ละวงเล็บได้ n^2

$$\left(a_n = \left((n-1)^2+1\right)+\left((n-1)^2+2\right)+\ldots+n^2\right)$$
$$S_n = \frac{n^2\left(n^2+1\right)}{2}$$

Ex $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$; a_n เป็นลำดับเลขคณิต

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)\cdot\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$$

เนื่องจาก $a_{n+1} - a_n = d$ เสมอ

ดังนั้น $\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{d} - \frac{\sqrt{a_n}}{d} = f(n+1) - f(n)$

$$S_n = f(n+1) - f(1) = \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}$$

Ex $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$

$$= \frac{\sqrt{25}-1}{1} = 2$$

Ex ให้ $n > 1$

$$A_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \frac{2^2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{3^2-1}{3\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n\cdot n}$$
$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$
$$= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}$$

$= \frac{n+1}{2n}$

Ex $\sum n^2$

แนวคิด
$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$
$$\sum(n^3 - (n-1)^3) = 3\sum n^2 - 2\sum n + n$$
$$n^3 = 3\sum n^2 - 2\sum n + n$$
$$3\sum n^2 = n^3 + 2\sum n - n$$
$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ex $\sum n^3$

แนวคิด
$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$
$$\sum(n^4 - (n+1)^4) = 4\sum n^3 - 6\sum n^2 + 4\sum n - 1$$
$$n^4 = 4\sum n^3 - 6\sum n^2 + 4\sum n - 1$$
$$4\sum n^3 = n^4 + 6\sum n^2 - 4\sum n + 1$$
$$= (\sum n)^2$$

Ex ผลบวก n พจน์ ของ ลำดับเลขคณิต 2 ชุด มีอัตราส่วนเป็น 7n+1 : 4n+27 จงหาอัตราส่วนของพจน์ที่ 11

แนวคิด ต้องการหา $\frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2}$

แต่ $\frac{7n+1}{4n+27} = \frac{\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2}}{\frac{2a_2+(n-1)d_2}{2}} = \frac{a_1+\frac{n-1}{2}d_1}{a_2+\frac{n-1}{2}d_2}$

ต้อง หา n ที่ทำให้ $\frac{n-1}{2} = 10$

นั่นคือ n = 21

$\therefore \frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2} = \frac{7\cdot 21+1}{4\cdot 21+27} = \frac{4}{3}$

A'38 จำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 8$ มีค่าเท่าใด

ตอบ 80

A'38 กำหนดให้ $f : I^+ \longrightarrow I^+$ โดยที่

f(1) = 1 = f(2) และ

f(n) = f(n-1) + f(n-2) เมื่อ n > 2

ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเท็จ

(1) f(6)[f(5)+f(7)] = f(12)

(2) f(20)f(20) - f(19)f(21) = -1

(3) 1 + f(1) + f(2) + ... + f(30) = f(32)

(4) f(1) + f(3) + f(5) + ... + f(29) = f(31)

แนวคิด จากการกระจาย

$$f(2n) = f(2) + f(3) + f(5) + \ldots + f(2n-1)$$

$f(2n) = f(1) + f(3) + f(5) + ... + f(2n-1)$ ...(1) **

$f(2n+1) = f(1) + f(2) + f(4) + ... + f(2n)$ ...(2) **

$f(2n) + f(2n+1) = f(2n) + f(2n-1) + ... + f(2) + f(1) + 1$

$f(2n+2) = (2n) + f(2n-1) + ... + f(2) + f(1) + 1$ **

ดังนั้น $f(32) = f(30) + f(29) + ... + f(1) + 1$

แต่ $f(1) + f(3) + f(5) + ... + f(29) = f(30) \Longrightarrow$ ข้อ (4) เป็นเท็จ

พิจารณาตัวเลือกในข้อ (2)

$f(n)f(n) - f(n-1)f(n+1)$

$= f(n)[f(n-1)+f(n-2)] - f(n-1)[f(n)+f(n-1)]$

$= f(n)f(n-1) + f(n)f(n-2) - f(n-1)f(n) - f(n-1)(f(n-1)$

$= (-1)[f(n-1)f(n-1) - f(n-2)f(n)]$

$= (-1)^2[f(n-2)f(n-2) - f(n-3)f(n-1)]$

....

$= (-1)^{n-2}[f(2)f(2) - f(1)(3)]$

$= (-1)^n[(1)(1) - (1)(2)]$

$= (-1)^{n+1}$

ดังนั้น $f(20)f(20) - f(19)f(21) = (-1)^{20+1} = -1$

A'38 กำหนดให้ $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$ เมื่อ $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ จะได้ a_{100} อยู่ในช่วงใด

แนวคิด $a_1 = 1$

จาก $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$ จะได้

1) $a_n > a_{n-1} > .... > a_2 > a_1 = 1$

2) $a_n^2 > 1; n \neq 1$ หรือ $\dfrac{1}{a_n^2} < 1; n \neq 1$

3) $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2}$

จาก $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2}$ ได้ว่า

1) $a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3$

2) $a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2$

จาก $a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3$ ได้ว่า $\sum\limits_{n=2}^{n} a_n^2 < \sum\limits_{n=2}^{n} a_{n-1}^2 + \sum\limits_{n=2}^{n} 3$

นั่นคือ $a_n^2 < a_1 + (n-1)3$ หรือ $a_n < \sqrt{a_1 + (n-1)3}$

จาก $a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2$ ได้ว่า $\sum\limits_{n=2}^{n} a_n^2 > \sum\limits_{n=2}^{n} a_{n-1}^2 + \sum\limits_{n=2}^{n} 2$

นั่นคือ $a_n^2 > a_1 + (n-1)2$ หรือ $a_n > \sqrt{a_1 + (n-1)2}$

$\sqrt{a_1 + (n-1)2} < a_n < \sqrt{a_1 + (n-1)3}$

หรือ $\sqrt{1 + (100-1)2} < a_{100} < \sqrt{1 + (100-1)3}$

สรุป $14 < a_{100} < 18$ (ค่าจริง $a_{100} = 14.2137$)

A'38 ลากคอร์ดของรูปวงกลม 29 เส้น โดยให้

ก. แบ่งรูปวงกลมออกเป็นบริเวณย่อย ๆ ได้จำนวนมากที่สุดซึ่งเท่ากับ p บริเวณ

ข. แบ่งรูปวงกลมออกเป็นบริเวณย่อย ๆ ได้จำนวนน้อยที่สุด ซึ่งเท่ากับ q บริเวณ

จะได้ p+q มีค่าเท่าใด

ตอบ 30 + 435 = 465

A'38 ถ้า $\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan x-\frac{\pi}{4}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

แนวคิด $\frac{1}{k^2+k+1}=\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}$

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan\left(\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}\right)=\arctan(k+1)-\arctan(k)$$

$$= f(k+1) - f(k)$$

$$S_n = f(n+1) - f(1) = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

นั่นคือ x = n+1

A'37 ค่าของ $\left(2-\frac{1}{2+1}\right)\left(2-\frac{1}{2^2+1}\right)\left(2-\frac{1}{2^3+1}\right)\cdots\left(2-\frac{1}{2^8+1}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

แนวคิด $a_n=2-\frac{1}{2^n+1}=\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}=\frac{f(n+1)}{f(n)}$; $f(n) = 2^n+1$

$$\prod_{n=1}^{8}\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{f(8+1)}{f(1)}=\frac{2^9+1}{2+1}=171$$

A'36 จงหาจำนวนเต็มที่เรียงกัน 11 จำนวน ที่ผลบวกของกำลังสองของทุกจำนวนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป m^2 โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

แนวคิด $\sum_{k=1}^{11}(n-1+k)^2=\sum_{k=1}^{11}(n-1)^2+2(n-1)\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}k^2$

$$= 11(n^2 + 10n +35)$$

$$m^2 = 11(n^2 + 10n + 35)$$

ได้ว่า $11|m^2$ และเนื่องจาก 11 เป็นจำนวนเฉพาะ

ดังนั้น $11|m$

ให้ m = 11(d)

$$11d^2 = n^2 + 10n + 35 = (n+5)^2-1 + 11$$

$$= (n+4)(n+6) + 11$$

ได้ว่า $11|(n+4)(n+6)$

นั่นคือ 11 หาร n+4 ลงตัว หรือ 11 หาร n+6 ลงตัว

11 หาร n+4 ลงตัว เมื่อ n = 7, 18, 29, ...

11 หาร n+6 ลงตัว เมื่อ n = 5, 16, 27, ...

ค่าของ n ที่ต้องการคือ n ที่ทำให้ $\frac{(n+5)^2-1}{11}$ อยู่ในรูปจำนวนเต็ม k^2

เช่น $n = 18$; $18^2+19^2+20^2+...+28^2 = 77^2$

A'36 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$m^2 = \underbrace{444\ldots4}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{888\ldots8}_{n-1\text{ ตัว}}9$$

แนวคิด $$m^2 = 4\cdot\frac{10^n-1}{9}\cdot 10^n + 8\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10 + 9$$

$$m^2 = \left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$$

เนื่องจาก $3 \mid 2\cdot 10^n + 1$ ดังนั้น $\frac{2\cdot 10^n+1}{3} \in I$

ดังนั้น ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะมี $m = \frac{2\cdot 10^n+1}{3}$ ที่ทำให้

$$m^2 = \underbrace{444\ldots4}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{888\ldots8}_{n-1\text{ ตัว}}9$$

A'35 **บทนิยาม** จำนวนเต็มบวก n จะเรียกว่า <u>จำนวนสามเหลี่ยม</u> ก็ต่อเมื่อ n อยู่ในรูป $1 + 2 + ... + k$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n_1 + n_2$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

(2) ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว n_1n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

(3) ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $9n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

(4) ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

แนวคิด $n = \frac{k(k+1)}{2}$

$9n+1 = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = 1 + 2 + 3 + ... + (3k+1) \Longrightarrow$ ข้อ (3) ถูก

A'35 $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + ... + \cos^2 179^\circ$ มีค่าเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม)

แนวคิด $$\sum_{k=1}^{90}\cos^2 k + \sum_{k=91}^{179}\cos^2 k = \sum_{k=1}^{90}\cos^2 k + \sum_{k=1}^{89}\sin^2 k$$

$$= \cos^2 90 + \sum_{k=1}^{89}\left(\cos^2 k + \sin^2 k\right)$$

$$= 89$$

A'35 กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_{2535}$ เป็นจำนวนจริงซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ ทุกจำนวนเต็ม $n \ge 2$

จงพิสูจน์ว่า $71 < a_{2535} < 88$

แนวคิด $\sqrt{a_1+(n-1)2} < a_n < \sqrt{a_1+(n-1)3}$

หรือ $\sqrt{1+(2535-1)2} < a_{2535} < \sqrt{1+(2535-1)3}$

สรุป $71 < a_{100} < 88$

A'33 จงหาจำนวนเต็มบวกในตำแหน่งที่ 1 ล้าน ของลำดับต่อไปนี้

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

โดยที่ลำดับจะมีจำนวนเต็มบวก n เกิดขึ้น n ตำแหน่ง

แนวคิด พิจารณา ลำดับ 1, 2, 2, 3, 3, 3, ..., $\underbrace{k, k, k, \ldots, k}_{k\text{ พจน์}}$ มี $\dfrac{k(k+1)}{2}$ พจน์

ดังนั้น ต้องหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ $\dfrac{k(k+1)}{2} \geq 10^6$

หรือ $k(k+1) \geq 2(10^6)$

เนื่องจาก $\sqrt{2 \cdot 10^6} = 1000\sqrt{2} \approx 1414.2$

แทน $k = 1413$; $k(k+1) = 1997982 < (2)10^6$

แทน $k = 1414$; $k(k+1) = 2000810 > (2)10^6$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุด คือ 1414

$a_{1,000,000} = 1414$