B-4'38 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 100\}$

A(x,y) เป็นอนุกรมอนันต์ โดยที่

$A(x,y) = 1+\frac{x}{y}+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^3+\ldots$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

$V = \{ (x,y) \in U\times U \mid A(x,y)$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

จำนวนสมาชิกของ V เท่ากับเท่าใด

ตอบ $(x < y) \Longrightarrow \frac{99(100)}{2} = 4950$

B-4'38 **บทนิยาม** $\prod_{k=m}^{n} f(k) = f(m)\cdot f(m+1)\cdots f(n-1)\cdot f(n)$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก $m \le n$

กำหนดให้ $f(k) = 1-\frac{1}{k^2}$

$a_1 = 1$ และ $a_n = \prod_{k=2}^{n} f(k)$ เมื่อ $n \ge 2$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(Hint : $a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{(k)(k)}\right) = \frac{n+1}{2n}$)

ตอบ $\frac{1}{2}$

B-4'38 ค่าของ n ที่ทำให้ $\frac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3} = \frac{241}{288}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 11

B-4'38 $U = \{1, 2, 3, ..., 200\}$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(2i+1)$

$X = \{S_n \mid n \in U\}$

ในการสุ่มเลือกสมาชิกหนึ่งตัวจากเซต X ความน่าจะเป็นที่จะได้สมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มคู่มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 1

B-4'38 ลำดับจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, a_3, ...$ กำหนดโดย

$a_1 = 4$

และสำหรับ $n \ge 2$

$a_n = \begin{cases} k, k \text{ เป็นเศษเหลือจากการหาร } a_{n-1} \text{ ด้วย 3 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่} \\ (5)^{a_{n-1}}, \text{เมื่อ n เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ผลบวกของ $\sum_{i=1}^{100} a_n$ เท่ากับเท่าใด

(Hint : $a_1 = 4, a_{4k-2} = 1, a_{4k-1} = 5, a_{4k} = 2, a_{4k+1} = 25$ เมื่อ k = 1, 2, 3, ...)

ตอบ 804

B-3'37 ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in R^+$

$A = \frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\cdots(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2\cdots a_n}$

ค่าต่ำสุดของ A เท่ากับเท่าใด

แนวคิด จาก $(x-1)^2 \geq 0$

$$x+\frac{1}{x} \geq 2$$

$$x+\frac{1}{x}+1 \geq 3$$

$$\frac{x^2+x+1}{x} \geq 3$$

ดังนั้น $\frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\cdots(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2\cdots a_n} \geq 3^n$

ค่าต่ำสุดของ $A = 3^n$

B-3'37 กำหนด A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + 10(10!)

ถ้าเขียน A ในรูปจำนวนเต็มบวกแล้ว A ประกอบด้วยเลข 9 กี่ตัว

ตอบ 4 ตัว (11! - 1 = 39916799)

B-3'37 กำหนดให้ $S = \frac{\log 2}{3}+\frac{\log 4}{9}+\frac{\log 8}{27}+\ldots$

โดยที่ ลำดับของเศษเป็นลำดับเลขคณิต และ ลำดับของส่วนเป็นลำดับเรขาคณิต

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) $0 < S < 0.5$

(2) $0.5 < S < 0.75$

(3) $0.75 < S < 1.25$

(4) $1.25 < S$

ตอบ ข้อ (1)

B-3'37 กำหนด $A = \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$ $B = \frac{1}{\sqrt[9]{9!}}$ และ $C = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) A < B < C

(2) B < A และ C ไม่มีความหมาย

(3) C < B < A

(4) A < B และ C ไม่มีความหมาย

ตอบ ข้อ (3)

แนวคิด n+1 > n > n-1 > ... > 3 > 2 > 1

$$n! > (n+1)^n$$

$$n!(n!)^n > (n+1)^n(n!)^n$$

$$(n!)^{n+1} > ((n+1)!)^n$$

$$\left((n!)^{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} > \left(((n+1)!)^n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} > ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

B-2'36 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\ldots+\frac{99}{100}\right)$

แนวคิด $\sum_{n=1}^{99}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1} = \sum_{n=1}^{99}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+1} = \sum_{n=1}^{99}\frac{n}{2} = \frac{99(99+1)}{4} = 2475$

B-2'36 ให้ $S_n = 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\cdot\frac{1}{1} = 2$

D-1 ให้ $s_1 = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ ;\ |q| < 1$

$s_2 = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots\ ;\ |Q| < 1$

จงหาค่าของ $1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots$ ในรูป S_1 และ S_2

แนวคิด $S_1 = \frac{1}{1-q}\ ;\ S_2 = \frac{1}{1-Q}$

$1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots = \frac{1}{1-qQ} = \frac{S_1S_2}{S_1+S_2-1}$

D-1 $\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

แนวคิด $\arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4} = \arctan(k^2+k+1) - \arctan(k^2-k+1)$

$= f(n+1) - f(n)\ ;\ f(n) = \arctan[k(k-1)+1]$

$S_n = f(n+1) - f(1) = \arctan(k^2+k+1) - \arctan(1) = \arctan(k^2+k+1)-\frac{\pi}{4}$

$S_\infty = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

D-1 ข้อใดถูกต้อง

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right) = 0$

(2) ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันลด และ มีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x)$ หาค่าได้

(3) อันดับที่มีพจน์ทั่วไป $a_n = e^{\sin^n(2^n)}$ เป็นอันดับคอนเวอร์เจนต์

แนวคิด $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) > n\cdot\frac{1}{2n}$

หรือ $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{2} \Longrightarrow$ ข้อ (1) ผิด

ข้อ (2) ถูก เนื่องจาก $0 \le \lim_{x\to\infty} f(x) < f(1)$

เนื่องจาก $-1 < \sin(2^n) < 1$ ไม่มีทางเป็น 1 หรือ -1

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\sin^n(2^n) = 0$

และ $\lim_{n\to\infty}\left(e^{\sin^n(2^n)}\right) = 1 \Longrightarrow$ ข้อ (3) ถูก

D-1 ให้พจน์ทั่วไปของอันดับ $a_n = \sqrt{n^2+3n+2000} - n$ ข้อใดถูกที่สุด

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$ หาค่าได้

(2) อันดับนี้เป็นอันดับไดเวอร์เจนต์

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ หาค่าไม่ได้ (∞)

(4) อันดับนี้เป็นอันดับคอนเวอร์เจนต์ ซึ่งมีค่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(5) มีข้อถูกมากกว่า 1 ข้อ

แนวคิด $\lim_{n\to\infty} a_n = n + \frac{3}{2} - n = \frac{3}{2} \neq 0$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ หาค่าไม่ได้ (∞) $\Longrightarrow$ ข้อ (3) ถูก

D-1 ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ แล้ว det(A) จะมีค่าเป็นเท่าไร

ถ้ากำหนด $a_n = a_1 + (n-1)d$ (d เป็นค่าคงที่)

แนวคิด C_2-C_1 ; C_3-C_1

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \end{vmatrix}$$

$C_3 = 2C_2$

ดังนั้น det(A) = 0