C'32 ข้อใดผิด

ก. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

ข. $\sum_{k=1}^{n}k^3-\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}k$

ค. $\sum_{k=1}^{n}k(k!)\ge(n+1)!+(n-1)(n-2)(n-3)-1$

ง. $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

แนวคิด $\sum_{k=1}^{n}k(k!)=\sum_{k=1}^{n}(k+1-1)(k!)$

$=\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)!-(k!)\big)$

$=(n+1)!-1!$

ถ้า $\sum_{k=1}^{n}k(k!)\ge(n+1)!+(n-1)(n-2)(n-3)-1$

หมายความว่า $(n-1)(n-2)(n-3)\le 0$ ซึ่งไม่เป็นความจริง เมื่อ $n>3$

$\Longrightarrow$ ตอบ ข้อ ค.

C'32 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้าลำดับ $\{b_n\}$ มี $|b_{n+1}|\ge|b_n|$ และมีจำนวนจริงบวก b ซึ่ง $|b_n|\le b$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว จะมีจำนวนจริง B ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}b_n=B$ และ $|B|\le b$

(2) มีลำดับ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ซึ่ง $b_n\ne 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดย $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ แต่ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\ne 0$

แนวคิด ข้อ (1) ผิด เช่น ลำดับ $(-1)^n\frac{x}{x+1}$: $\lim_{n\to\infty}b_n$ = no limit

ข้อ (2) ถูก เช่น $a_n=\frac{1}{3^n}$ และ $b_n=\frac{2}{3^n}$

C'32 ค่าของ $\frac{1}{\log_2 2533!}+\frac{1}{\log_3 2533!}+\frac{1}{\log_4 2533!}+\ldots+\frac{1}{\log_{2533} 2533!}$

ตอบ 1

C'32 กำหนดลำดับ $\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\ldots,\frac{p_n}{q_n},\ldots$

เมื่อ $p_n=p_{n-1}+2q_{n-1}$

$q_n=p_{n-1}+q_{n-1}$ สำหรับทุก $n>1$

ลิมิตของลำดับนี้เป็นเท่าใด

แนวคิด $\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}+2q_{n-1}}{p_{n-1}+q_{n-1}}=\frac{\frac{1}{q_{n-1}}}{\frac{1}{q_{n-1}}}\cdot\frac{p_{n-1}+2q_{n-1}}{p_{n-1}+q_{n-1}}$

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}+2}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}+1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}$$

ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}$$

$$A = \frac{A+2}{A+1}$$

$$A^2 + A = A + 2$$

$$A > 0 ;\quad A = \sqrt{2}$$

C'32 กำหนดให้ จำนวนเต็ม n มีค่ามากกว่า 3

ถ้า $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว n อยู่ในช่วงใด

แนวคิด $2\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \Longrightarrow n = 0, 2, 7$ แต่ $n > 3$

ดังนั้น n = 7

C'32 ให้ $a \neq 0$, $d \neq 0$ เป็นจำนวนจริง

ถ้า a, a+d, a+2d, ..., a+2nd เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยน้อยกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ข. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยมากกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ค. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ง. สรุปความสัมพันธ์ระหว่างส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่ได้

แนวคิด n = 1, 2, 3, ..., 2n+1

x = a + (n-1)d = (a-d) + nd

y = n

$x = dy + (a - d)$

$S.D._x = |d| S.D._y$ และ $M.D._x = |d| M.D._y$

ให้ 2n+1 = k

$$S.D._y^2 = \frac{\sum_{n=1}^{k} n^2}{k} - \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{k^2-1}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3}$$

$$S.D._y = \sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}$$

$$M.D._y = \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 0}{2n+1}$$; แยกคิด 3 พวก คือ <, > และ = $\overline{y}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n+1}$$

$$\frac{S.D._x}{M.D._x} = \frac{|d|S.D._y}{|d|M.D._y} = \frac{S.D._y}{M.D._y} = \sqrt{\frac{(3n^2+3n)+(n^2+n+1)}{3n^2+3n}}$$

$$> 1$$

ดังนั้น M.D. < S.D. $\Longrightarrow$ ตอบ ข้อ ก.

C'32 กำหนด $A = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$

A มีค่าเป็นเท่าใด

ตอบ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C'33 กำหนดให้ $a_n = 1 + \left(\frac{1}{2i}\right)^n$ และ $b_n = 1 + \left(\frac{-1}{2i}\right)^n$ เมื่อ $i^2 = -1$

ข้อใดต่อไปนี้ ผิด

ก. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|b_n|$

ข. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n + b_n| = 2$

ค. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n b_n| = 1$

ง. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$

ตอบ ข้อ ง. เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 1$

C'33 ให้ $n \in I^+$ และ P(n) แทนความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนหัวมากกว่าจำนวนก้อย จากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 อัน n ครั้ง

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) P(1991) = P(2533)

(2) P(1990) > P(2531)

แนวคิด กรณี n เป็นจำนวนคี่

เกิดผลได้ 2 แบบ เท่านั้น คือ ก้อย > หัว หรือ หัว > ก้อย ซึ่งมีโอกาสเกิดเท่ากัน

$P(n) = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ ข้อ (1) ถูก

กรณี n เป็นจำนวนคู่

จะเกิดผลได้ 3 แบบ คือ ก้อย > หัว = ก้อย < หัว และ อีกแบบหนึ่งคือ ก้อย = หัว

$$1 = 2 \cdot P(n) + \frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}$$

$$P(n) = \frac{1}{2} - \frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}} < \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{ข้อ (2) ผิด}$$

C'33 ถ้า $\sum_{n=2}^{15} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a กับ b เป็น 1 แล้ว a+b เท่ากับเท่าไร

ตอบ 329 + 240 = 569

หรือ -329 + -240 = -569

C'34 กำหนดลำดับ $a_n = \frac{-72}{5}\left(\frac{-5}{6}\right)^n$

$b_n = 3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$

$c_n = a_n b_n$

n = 1, 2, 3, ...

แล้ว อนุกรมอนันต์ $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ คอนเวอร์สสู่ค่าใด

ตอบ $\frac{504}{19}$

C'35 กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้า $\sum_{n=1}^{7}(an + b + 4) = 63$ และ $\sum_{n=1}^{10}(bn + a + 8) = -65$ แล้ว a และ b เป็นสมาชิกของช่วงใดต่อไปนี้

ก. [-7,-3]

ข. [-5,0]

ค. [-4,2]

ง. [-2,3]

ตอบ ข้อ ค. เนื่องจาก a = 2 ; b = -3

C'35 ค่าของ (5)(41) + (8)(39) + (11)(37) + ... + (32)(23) เท่ากับเท่าใด

ตอบ 5425

C'35 ค่าของ $\ln 5 + \ln 10 + \ln 20 + \dots + \ln 1280 + \ln 2560$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ $10\ln 5 + 45\ln 2$

C'36 กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ถ้า $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \dots + a_{2535} = 3170$

และ $a_{1269} + a_{1270} + a_{1271} + \dots + a_{1308} = a_{2088}$

แล้ว a_1 เท่ากับเท่าใด

ตอบ -6335

C'36 ถ้าลำดับ 2, a, b, c, 162 เป็นลำดับเรขาคณิต แล้ว

$\log_a 2 + \log_b a + \log_c b + \log_a b + \log_b c + \log_c 162$

เท่ากับเท่าใด

แนวคิด $\log_a 2 + \log_b a + \log_c b + \log_a b + \log_b c + \log_c 162$

$= \log_a 2b + \log_b ac + \log_c 162b$

$= \log_a \frac{a}{r} ar + \log_b \frac{b}{r} br + \log_c \frac{c}{r} cr$

$= 6$

C'36 ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ที่มีลิมิตเป็น 3 และ

$b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $b_1 = 5$ อัตราส่วนร่วม = r และ

$b_n = a_n - a_{n-1}$ ทุกค่า $n \in \{2,3,4,\dots\}$

ถ้าอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว

คู่อันดับ (a_1,r) สอดคล้องกับสมการในข้อใด

ก. $(x-5)(3y+2) = 0$

ข. $x-5 = 3(1-y) + 5$

ค. $x = \frac{3-8y}{1-y}$

ง. $x = \frac{5}{y-1} + 3$

แนวคิด จาก $b_n = a_n - a_{n-1}$

$\sum_{n=1}^{n} b_n = b_1 + \sum_{n=2}^{n} b_n = b_1 + (a_n - a_1) = 5 - a_1 + a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 - a_1 + \lim_{n\to\infty} a_n$

$\frac{5}{1-r} = 5 - a_1 + 3 = 8 - a_1$

$a_1 = \frac{3-8r}{1-r} \Longrightarrow$ ข้อ ค. ถูกต้อง

C'37 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\log(a_1), \log(a_2), ..., \log(a_n)$, เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิต

(2) ถ้า a, b, c เป็นทั้งลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต โดยที่ a, b และ c ต่างไม่เท่ากับ 0 แล้ว $\frac{3a+b-2c}{3b-c} = 3$

ตอบ ข้อ (1) ถูก

ข้อ (2) ผิด

หมายเหตุ a, b, c เป็นทั้งลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต แสดงว่า

$a = b-d = \frac{b}{r}$ ...(1)

$c = b+d = rb$ ...(2)

ได้ว่า $b = 0$ หรือ $r = 1, d = 0$

C'37 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} k = 120$ แล้ว $\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{4-12k^2+9k^4} - 4k^2\right)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ -1270

C'37 อนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}+\ldots$ มีสมบัติตรงกับข้อใด

ก. เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกเท่ากับ 0.48

ข. เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ 0.5

ค. เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ 0.6

ง. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

(Hint : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n+1)-1}\right)$)

ตอบ ข้อ ข.

C'37 กำหนด $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_1 = 10$ และ a_2, a_3, a_4 เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง แล้ว $\sum_{n=1}^{12} a_n$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 10 หรือ 450

C'37 **ทฤษฎีบท** ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ n และ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{L}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1} - 2n\right)$ ตรงกับข้อใด

ตอบ $n + \frac{1}{2} + n - 2n = \frac{1}{2}$

C'37 ถ้า $f(x) = \sqrt{3x}$ เมื่อ $x \geq 0$

$a_1 = \sqrt{2}$ และ สำหรับแต่ละ $n \geq 2$ ให้ $a_n = f(a_{n-1})$

แล้ว $\lim_{n\to\infty}\left[\log_3\left(a_n^2\right) - \left[\frac{1}{2}\log_3\left(a_{n-1}\right)\right]^2\right]$ มีค่าเท่าใด

(Hint : $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}} = 3$)

ตอบ $2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2$

C'38 ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าดังนี้ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ค่ามัธยฐาน เมื่อ n เป็นเลขคู่ คือ $3\left(2^{-\frac{n}{2}-2}\right)$

(2) ค่ากึ่งกลางพิสัย คือ $\frac{2^n+2}{2^{n+2}}$

(3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ $\frac{2^n-1}{n^2\cdot 2^n}$

(4) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต คือ $2^{-\frac{n+1}{2}}$

ตอบ ข้อ (1) ถูก

ข้อ (2) ถูก

ข้อ (3) ผิด ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ $\frac{2^n-1}{n\cdot 2^n}$

ข้อ (4) ถูก

C'38 ให้ $a_n = e^{\frac{1}{2}\ln\left(3^{-n}\right)}$ และ $b_n = \log_{\frac{1}{3}}\left(a_n\right)$ ทุก $n \in N$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ข. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ค. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ง. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอบ ข้อ ข.

C'38 ให้ $a_0 = 1$ และ สำหรับแต่ละ $n \in N$ ให้ $a_n = 3^{2n-1}a_{n-1}$

ถ้า $\log_{\frac{1}{3}} a_0 + \log_{\frac{1}{3}} a_1 + \ldots + \log_{\frac{1}{3}} a_n = -91$ แล้ว n อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

ก. [1,7)

ข. [7,12)

ค. [12,13)

ง. [13,14)

(Hint : $a_n = 3^{\Sigma(2n-1)} = 3^{(n^2)}$

$-91 = \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{\Sigma n^2}\right) \Longrightarrow 91 = \sum n^2$)

ตอบ ข้อ ก. เนื่องจาก n = 6

C'38 ให้ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ข้อใดต่อไปนี้จริง

ก. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ข. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ค. มี $x \in R$ ที่ $\sec x = a$

ง. ไม่มี $x \in R$ ที่ $e^x = a$

(Hint : มี $\log_{\frac{1}{2}} a \Longrightarrow a > 0$,

จาก $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a \Longrightarrow \log_{\frac{1}{2}} a > 0 \Longrightarrow a < 1$)

ตอบ ข้อ ก.