C'21 อนุกรมใดเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ก. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

ข. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

ค. $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{3}{2^{n-1}}+\ldots$

ง. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$

จ. $0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + ...$

ตอบ ข้อ ก.

C'22 อนุกรมใดเป็นอนุกรมไดเวอร์เจน

ก. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

ข. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

ค. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$

ง. $0.015 + 0.00015 + 0.0000015 + ... + \frac{15}{10^{2n}} + ...$

จ. $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n + ...$

ตอบ ข้อ จ.

C'23 ให้ (1) $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ เป็นอนุกรม

(2) $S_1, S_2, S_3, ...$ เป็นอันดับผลบวกย่อยของ (1)

ข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูก

ก. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้

ข. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} S_n$ ไม่มีความหมาย

ค. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ แล้ว $\lim_{n+1\to\infty} a_{n+1} = 2$

ง. ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = 9^{100,000}$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

จ. ถ้า (1) เป็นอนุกรมเลขคณิต แล้ว $\lim_{n\to\infty} S_n$ ไม่มีความหมาย

ตอบ ข้อ ง.

C'24 ค่าของ $\frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{45}}+\frac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{41}+\sqrt{37}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{1}}$

เป็นเท่าใด

ตอบ $\frac{\sqrt{49}-\sqrt{1}}{4}=\frac{3}{2}$

C'24 x มีค่าเท่าใด จึงจะทำให้

(1) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ กับ $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$

แนวคิด จาก (1) ได้ว่า $-1 < x < 1$

จาก (2) ได้ว่า $\frac{1}{1-x} = 1+2\cdot\frac{x^2}{1-x^2}$ หรือ $x = 1$

ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขที่ 1

ดังนั้น ไม่มีค่า x ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติข้างต้น

C'24 สุเทพและวิยะดา เล่นเกมโยนลูกเต๋าครั้งละ 2 ลูก โดยโยนสลับกันเรื่อยไป ใครโยนได้ผลรวมของแต้มบนหน้าเต๋าทั้งสองลูกเท่ากับ 7 ก่อน จะเป็นผู้ชนะ ถ้าสุเทพเริ่มโยนลูกเต๋าเป็นคนแรก ความน่าจะเป็นที่สุเทพจะเป็นผู้ชนะเท่ากับเท่าใด

แนวคิด ความน่าจะเป็นที่จะโยนลูกเต๋า 2 ลูก ได้แต้มรวม 7 ในการโยนแต่ละครั้ง

$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ความน่าจะเป็นที่สุเทพจะชนะเมื่อโยนไปแล้ว n ครั้ง

$= a_n$

= ความน่าจะเป็นที่ก่อนหน้านั้น ซึ่งโยนมา n-1 ครั้ง ไม่มีใครโยนได้แต้มรวม 7 เลย แล้วครั้งสุดท้าย (ครั้งที่ n) สุเทพโยนได้แต้มรวม 7

$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

แต่ สุเทพจะได้โยน เมื่อ ครั้งที่ 1 , 3 , 5 , ... เท่านั้น

ความน่าจะเป็นที่สุเทพจะเป็นผู้ชนะ

$= a_1 + a_2 + \ldots$

$= \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\frac{1}{6}+\ldots$

$= \frac{6}{11}$

C'25 ค่าของ $\sum_{n=1}^{999}\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ เป็นเท่าใด

แนวคิด $\sum_{n=1}^{999}\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\prod_{n=1}^{999}\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{1000}{1}\right) = 3$

C'25 ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีผลต่างร่วมเป็น $\cos^2 A$ และมีค่าของ a_3 คือ

$a_3 = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$;

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ $5a_3 = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = 5\cos(2A)$

C'26 ถ้า $|\sin A| \neq 1$

ผลบวกของอนุกรม $1 + \sin^2 A + \sin^4 A + \sin^6 A + \ldots$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ตอบ $\frac{1}{1-\sin^2 A} = \sec^2 A = 1+\tan^2 A$

C'26 จงหาค่าของ $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\ldots+\sin^2 360$

(hint : $\sin^2 91^\circ = \cos^2 1^\circ$; $\sin^2 181 = \sin^2 1^\circ$; $\sin^2 A+\cos^2 A = 1$)

ตอบ 180

C'26 มีจำนวนเต็มกี่จำนวนที่อยู่ในช่วง [1983,2526] ซึ่งเมื่อหารด้วย 8 แล้ว เหลือเศษ 3

ตอบ 68 จำนวน

C'27 ถ้าผลบวก n พจน์แรกกำหนดโดย $S_n = n^2-5n$ จงหาพจน์ที่ 5

ตอบ $S_5 - S_4 = 4$

C'27 อันดับที่ n เมื่อ $n > 2$ กำหนดโดย $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ ถ้า $a_1 = 1$ และ $a_2 = 2$ จงหาผลบวกของ n พจน์แรก

แนวคิด ใช้ generating function

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0$$

แทนค่า $a_1=1$, $a_2=2$; $\quad a_0 = \frac{1}{2}$

ให้ $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$A(x)-a_0-a_1x = 3x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$$

$$A(x)-a_0-a_1x = 3x[A(x)-a_0] - 2x^2A(x)$$

แทนค่า $a_0=\frac{1}{2}$, $a_1=1$;

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

a_n = สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)$

$$= \frac{1}{2}(2^n)$$

$$= 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$$

เราสามารถหา S_n ได้โดยตรงจาก generating fuction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(U_n\right)x^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-2x}+\frac{b}{1-x}\right)$$

หาค่า a และ b ที่ทำให้ $(1-x)a + b(1-2x) = 1$

แทน $x = \frac{1}{2}$; $\quad a = 2$

แทน $x = 1$; $\quad b = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}\right)$$

U_n = สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cdot 2^n - 1\right)$$

$$= 2^n - \frac{1}{2}$$

$$= S_n + a_0 \; ; n > 0$$

$$S_n = U_n - a_0 = 2^n - 1$$

C'28 อนุกรมอนันต์ 0.3 + 0.033 + 0.00333 + 0.0003333 + ... มีค่าเท่ากับข้อใด

ตอบ $\frac{100}{297}$

C'28 ข้อต่อไปนี้เกี่ยวกับอันดับ จงสำรวจดูว่าข้อใดผิด

ก. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

ข. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}} = \frac{4}{3}$

ค. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1.0001)^n} = 1$

ง. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

ตอบ ข้อ ค. เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1.0001)^n} = 0$

C'28 กำหนดให้ $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ u = f(x)

จงหาว่า $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด เนื่องจาก $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1} = \frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1}$$

C'28 ให้การทดลองเป็นการโยนเหรียญอันหนึ่งซ้ำ ๆ จนกว่าหน้าที่ปรากฏครั้งแรกจะปรากฏอีกครั้งจึงยุติ ต่อไปนี้ ข้อใดถูก

ก. แซมเปิลสเปซ คือ {HH, HTH, TT, THT, HHH, TTT, ...}

ข. ให้ A เป็นเหตุการณ์ซึ่งเกิดก้อยเมื่อจบการทดลอง จะได้

$P(A) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^9}\right)$

ค. ให้ B เป็นเหตุการณ์ซึ่งเกิดหัวเมื่อจบการทดลอง จะได้ $P(B) = \frac{2}{3}$

ง. ให้ เหตุการณ์ C = {TT, THT, THHT, THHHT, ...}

D = {HH, HTH. HTTH. HTTTH, ...}

จะได้ P(C) + P(D) = 1

ตอบ ข้อ ง.

C'29 ค่าของ $\sin^3 1^\circ + \sin^3 2^\circ + \sin^3 3^\circ + \ldots + \sin^3 360^\circ$ เป็นเท่าใด

(Hint : $\sin^3 181^\circ = -\sin^3 1^\circ$)

ตอบ 0

C'29 ค่าของ $9\left(\frac{1}{1^2-2^2} + \frac{1}{2^2-4^2} + \frac{1}{4^2-8^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-2}-2^{2n}}\right)$ เท่ากับเท่าใด

(Hint : $\frac{1}{2^{2n-2}-2^{2n}}=\frac{1}{1-2^2}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}$)

ตอบ 2^{2-2n}-4

C'29 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}+\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

ตอบ $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{\frac{d}{dx}x}+(y-y)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

C'29 ผลบวกของจำนวนเต็มระหว่าง 20 และ 218 ที่หารด้วย 7 ลงตัว เป็นเท่าใด

ตอบ 3451

C'30 $\log_{10}2$, $\log_{10}(2^x-1)$ และ $\log_{10}(2^x+3)$ เป็นอันดับเลขคณิต แล้ว x เท่ากับเท่าไร

ตอบ $\log_2 5$

C'30 $3+33+333+...+\underbrace{333...3}_{n\text{ ตัว}}$

(Hint : $a_n=\frac{10^n-1}{3}$)

ตอบ $\frac{1}{27}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$

C'30 กำหนด $n\in I$ และ $n\geq 2$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $2^n=\left(2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{i}\right)+\binom{n}{\frac{n}{2}}$

(2) ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว $2^n=2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{i}$

แนวคิด ข้อ (1) ถูก โดย แบ่งครึ่งคิด เหลือตัวกลาง

ข้อ (2) ถูก โดย แบ่งครึ่งคิด

C'30 มีจำนวนเต็มอยู่กี่จำนวนที่อยู่ในช่วง (1988, 2531) ซึ่งเมื่อหารด้วย 8 แล้ว เหลือเศษ 5

ตอบ 68

C'30 กำหนด $i^2=-1$ ค่าของ $\sum_{n=1}^{2531}\left(\frac{1}{i}\right)^n$

ตอบ -1

C'31 กำหนดให้ $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ เป็นลำดับเลขคณิต

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเลขคณิต

ข. a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเรขาคณิต

ค. $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ เป็นลำดับเลขคณิต

ง. $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ เป็นลำดับเรขาคณิต

แนวคิด $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ เป็นลำดับเลขคณิต

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{c+a}$$

$2b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow$ ตอบ ข้อ ก.

C'31 ให้ a_n และ b_n เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$a_n = \cos n\pi$

$b_n = \sin\frac{2n-1}{2}\pi$

อนุกรมใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ก. $(a_1-b_1) + (a_2-b_2) + (a_3-b_3) + ...$

ข. $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots$

ค. $(a_1+b_1) + (a_2+b_2) + (a_3+b_3) + ...$

ง. $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ...$

(Hint : $\cos n\pi = (-1)^n$

$\sin\frac{2n-1}{2}\pi = (-1)^{n-1}$)

ตอบ ข้อ ค.