ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1978
том XIV, вып. 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

КРИТЕРИЙ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИЙ СПРОСА

Л.Г.МИТЮШИН, В.М.ПОЛТЕРОВИЧ

(Москва)

В теории потребительского выбора (см., например, [1, стр. 313]) часто постулируется, что поведение потребителя может быть описано экстремальной задачей

$$u(c) \rightarrow \max, \quad pc\leq\beta, \quad c\geq 0, \tag{1}$$

где $u(c)$ — индикатор предпочтения (целевая функция); c — вектор потребительских благ; p — вектор цен; β — доход потребителя, который здесь предполагается неизменным.

Обозначим через R_+^n совокупность неотрицательных n-мерных векторов (столбцов), через T — символ транспонирования. Считаем векторы с — столбцами, а p — строками, так что $p^T \in R_+^n$. Пусть $C(p)$ —совокупность решений задачи (1) при фиксированном p и $G\subset R_+^{2n}$. Отображение $C(p)$ называют функцией спроса. Говорят, что $C(p)$ монотонно на G, если

$$(p-q)\,(c_p-c_q)\leq 0, \tag{2}$$

как только $c_p\in C(p)$, $c_q\in C(q)$ и $(p^T, c_p) \in G$, $(q^T, c_q) \in G$.

Для ряда моделей экономического равновесия (см., в частности, [2—4]) требование монотонности функции спроса или какая-либо его модификация является существенной составной частью условий, обеспечивающих единственность равновесного состояния, справедливость теорем о магистрали, а также сходимость вычислительных алгоритмов [3, 5, б].

Основная цель данной статьи — описать класс индикаторов предпочтения $u(c)$, для которых задача (1) порождает монотонную функцию спроса. Кроме того, будет рассмотрено обобщение условия (2).

Пусть $G=P\times S$, где $S\subset R_+^n$ и

$$P=\{p \mid p\geq 0, C(p)\cap S\neq\varnothing\}. \tag{3}$$

Введем следующие предположения: 1) множество S выпукло и его внутренность S_0 непуста; 2) функция $u(c)$ определена на R_+^n , вогнута и обладает на S непрерывными вторыми производными *; 3) градиент $v(c)$ функции $u(c)$ неотрицателен и удовлетворяет неравенству $v(c)c>0$ для любого $c\in S$; 4) доход β — положительное число.

---

* Последнее требование подразумевает возможность гладкого продолжения $u(c)$ на некоторое открытое множество, содержащее S (быть может, за пределы R_+^n).

Необходимое и достаточное условие максимума в точке c при ценах p записывается так

$$v(c)=\lambda p-w,\ \lambda\,(pc-\beta)=0,\ wc=0, \tag{4}$$

где $\lambda\in R_+^{\,1}$, $w^{\mathrm{T}}\in R_+^{\,n}$.

Из наших предположений следует, что $pc=\beta$, поэтому, используя (4), получим

$$\lambda=\frac{1}{\beta}\,v(c)c. \tag{5}$$

Введем обозначение: $f(c)=\frac{1}{v(c)c}\,v(c)$. Согласно 1) —3), вектор-функция $f(c)$ определена и непрерывно дифференцируема на S. Пусть c_p и c_q, — решения задачи (1) соответственно при ценах p и q. Из (4) и (5) имеем

$$(p-q)\,(c_p-c_q)\le \beta\,(f(c_p)-f(c_q)\,)\,(c_p-c_q). \tag{6}$$

Лемма 1. *Отображение $C(p)$ тогда и только тогда монотонно на G, когда матрица Якоби $F(c)$ функции $f(c)$ удовлетворяет условию*

$$z^{\mathrm{T}}F(c)\,z \tag{7}$$

для любых $c\in S$ и $z\in R^{n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [7, стр. 262], неравенство (7) выполняется на S_0 тогда и только тогда, когда $f(c)$ монотонна. По непрерывности заключаем, что (7) эквивалентно условию

$$(f(c_p)-f(c_q)\,)\,(c_p-c_q)\le 0 \ \text{ для всех } \ c_p\,,\,c_q\in S. \tag{8}$$

Из (8) и (6) следует (2). Если же (8) нарушается, то найдутся c_p , c_q , принадлежащие S, такие, что

$$(f(c_p)-f(c_q)\,)\,(c_p-c_q)>0. \tag{9}$$

Полагая $p=\beta\ f(c_p)$, $q=\beta\ f(c_q)$ и используя (4), (9) убеждаемся в немонотонности $C(p)$. Лемма доказана.

Дифференцируя $f(c)$, получаем вместо (7) эквивалентное соотношение

$$(vc)\,z^{\mathrm{T}}U\,z-(vz)\,z^{\mathrm{T}}U\,c-(vz)^2\le 0, \tag{10}$$

где $v=v(c)$, $U=U(c)$ — матрица Гессе функции $u(c)$.

Фиксируем c и заметим, что при $vz=0$ неравенство (10) справедливо в силу отрицательной полуопределенности матрицы U. Поэтому, как легко показать, для проверки его выполнения на всем пространстве R^{n} достаточно ограничиться векторами z, удовлетворяющими условию

$$vz=vc. \tag{11}$$

Теперь неравенство (10) можно переписать

$$z^{\mathrm{T}}U\,z-z^{\mathrm{T}}U\,c\le vc \tag{12}$$

или

$$(z-{}^1\!/_2\,c)^{\mathrm{T}}U\,(z-{}^1\!/_2\,c)-{}^1\!/_4\ c^{\mathrm{T}}U\,c\le vc\,, \tag{13}$$

где z удовлетворяет (11), а в остальном произволен. После замены переменных

$$x=\frac{1}{vc}\,(2z-c)$$

получаем окончательное условие, эквивалентное (13)

$$^{1}/_{4}\,\alpha\,(\,vc\,)^{2} — {}^{1}/_{4}\,c^{\mathrm{T}}\,U\,c \le vc, \tag{14}$$

где

$$\alpha = \sup_{vx=1} x^{\mathrm{T}}\,U\,x. \tag{15}$$

Если матрица U отрицательно определена, то, как нетрудно вычислить $\alpha = 1/vU^{-1}\,v^{\mathrm{T}}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)—4). *Функция спроса* $C(p)$ *монотонна на* G *тогда и только тогда, когда для любого* $c \in S$ *выполняются соотношения* (14), (15). *Если, кроме того, матрица Гессе* $U(c)$ *отрицательно определена, то для монотонности* $C(p)$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $c \in S$ *имело место неравенство*

$$\frac{vc}{vU^{-1}v^{\mathrm{T}}} - \frac{c^{\mathrm{T}}Uc}{vc} \le 4\,. \tag{16}$$

Замечание 1. Можно показать, что каждое из соотношений (7), (14) и (16) влечет за собой монотонность и в том случае, когда S не содержит внутренних точек.

Первое слагаемое в (14) неположительно. Отбросив его, получаем достаточное условие монотонности, проверка которого не требует обращения матрицы U

$$-\,c^{\mathrm{T}}\,U\,c \le 4vc. \tag{17}$$

Еще более удобное для проверки, хотя и менее сильное, достаточное условие состоит в выполнении системы неравенств

$$-\,U\,c \le 4v^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

(умножив (18) на c^{T}, получим (17)).

Пусть $c=(c_1,..., c_n)$, $v=(u_1,..., u_n)$, $U=(u_{ij})$. Если $v>0$, то соотношение (18) можно переписать

$$\xi_i = -\frac{1}{u_i}\,\Sigma_j\, u_{ij}c_j \le 4 \qquad i=1,..., n. \tag{19}$$

Очевидно, $\xi_i = \Sigma_j\,\xi_{ij}$, где $\xi_{ij} = —\frac{\partial}{\partial c_j}(\ln u_i)\ /\ \frac{\partial}{\partial c_j}(\ln c_i)$ — эластичность предельной полезности продукта i по j. Таким образом, величину ξ_i естественно назвать полной эластичностью предельной полезности продукта i.

Критерий (17), так же как и (18), аддитивен: если он выполняется для каждой из нескольких функций полезности $u^{(k)}(c)$, то он имеет место и для их суммы $u(c) = \Sigma_k\, u^{(k)}(c)$. Это обстоятельство часто оказывается полезным.

Следствие 1. Пусть выполнены условия 1) —4) и, кроме того, $u(c) = \Sigma_k u^{(k)}(c)$, причем каждое слагаемое неотрицательно и положительно однородно степени $\alpha_k \ge 0$. Тогда отображение $C(p)$ монотонно.

Действительно, по формуле Эйлера имеем

$$\alpha_k\, u^{(k)}(c) = v^{(k)}(c)c, \tag{20}$$

где $v^{(k)}(c)$ — градиент $u^{(k)}(c)$. Дифференцируя (20), умножая полученный результат на вектор c и суммируя по k, придем к неравенству (17).

Предположим теперь, что индикатор предпочтения имеет вид

$$u(c) = {}^1/_2 c^{\mathrm{T}} Uc + a^{\mathrm{T}} c, \tag{21}$$

где $a \in R_+^n$, $a \neq 0$, матрица U отрицательно полуопределена и не зависит от c. Неравенство (18) в этом случае можно записать

$$— Uc \leq {}^4/_5 a. \tag{22}$$

Интересно сопоставить его с естественным условием неубывания u (c)

$$— Uc \leq a. \tag{23}$$

Таким образом, в случае (21) отображение $C(p)$ монотонно, если в качестве S взято многогранное множество, определяемое неравенством (22) и дополнительным требованием $a^{\mathrm{T}}c > 0$, обеспечивающим положительность $v(c)c$. Нетрудно привести примеры, показывающие, что расширение S до множества (23) может привнести к нарушению монотонности.

Замечание 2. Если матрица U отрицательно определена и в (16) имеет место строгое неравенство, то (2) также выполняется строгим образом, как только $c_p \neq c_q$. Если S лежит внутри R_+^n, то разные цены порождают разный спрос, в этом случае отображение $C(p)$ строго монотонно.

Замечание 3. Приведенные выше результаты остаются справедливыми, если в (1) требование неотрицательности заменить на более общее ограничение: $c \in K$, где K— выпуклый телесный конус в R_+^n, и считать, что $S \subset K$.

Если в модели равновесия имеется только один потребитель вида (1), то она сводится к экстремальной задаче и исследуется сравнительно просто. Критерии монотонности «работают» в тех случаях, когда потребителей много и их совокупный спрос не порождается единой целевой функцией. Рассмотрим пример, показывающий, на наш взгляд, что именно такая ситуация является типичной.

Пусть число продуктов равно трем и каждый из трех участников располагает единичным доходом. Функции предпочтения зададим следующим образом:

$$u^{(1)}(c_1, c_2, c_3) = c_1^{1/2} + \sqrt{2}\, c_2^{1/2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\, c_3^{3/4},\ \ u^{(2)}(c_1, c_2, c_3) = u^{(1)}(c_2, c_3, c_1),$$

$u^{(3)}(c_1, c_2, c_3) = u^{(1)}(c_3, c_1, c_2)$. Согласно следствию 1, эти функции порождают монотонный спрос. Покажем, что совокупный спрос $C(p)$ не описывается задачей вида (1), поскольку в некоторой точке p он не удовлетввряет необходимым для этого условиям — известным соотношениям Слуцкого [8,стр. 258]

$$\frac{\partial C_i}{\partial p_k} + C_k c_i^0 = \frac{\partial C_k}{\partial p_i} + C_i c_k^0, \tag{24}$$

где $C(p) = C = (C_1, C_2, C_3)$; c_i^0 — некоторые числа.

Положим $p=(1,\ 1,\ 1)$. Тогда, как легко проверить, спрос первого потребителя равен $({}^1/_4,\ {}^1/_2,\ {}^1/_4)$ а спрос остальных получается круговой перестановкой, так что $C = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Используя формулы из [8, стр. 262], можно вычислить якобиеву матрицу совокупного спроса

$$\left(\frac{\partial C_i}{\partial p_k}\right) = \begin{pmatrix} -1{,}95 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}45 & -1{,}95 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}45 & -1{,}95 \end{pmatrix}$$

Для таких $\dfrac{\partial C_i}{\partial p_k}$ и C_i система линейных уравнений (24), как нетрудно убедиться, неразрешима относительно c_i^0.

Отметим, что если исходные функции предпочтения положительно однородны, то совокупный спрос порождается некоторой единой целевой функцией [3].

В заключение рассмотрим естественное обобщение свойства монотонности. Отображение $C(p)$ назовем квазимонотонным на G, если

$$\min \{ p\,(c_p - c_q),\ q\,(c_q - c_p) \} \le 0 \tag{25}$$

для всех $(p^{\mathrm{T}}, c_p) \in G$, $(q^{\mathrm{T}}, c_q) \in G$ и $c_p \in C(p)$, $c_q \in C(q)$. Очевидно, из (2) следует (25). Если $u(c)$ вогнута и не достигает абсолютного максимума, то порождаемая ею функция спроса всегда удовлетворяет условию (25). Оно, однако, неаддитивно (в отличие от (2)), поэтому критерий квазимонотонности совокупного спроса непременно должен включать в себя соотношения, связывающие характеристики целевых функций разных участников. Удовлетворительная формулировка такого критерия нам неизвестна. Ниже будет указано необходимое и близкое к достаточному условие, которому должна удовлетворять якобиева матрица $C(p)$, если имеет место (25).

Будем говорить о квазимонотонности однозначной функции $C(p)$ на множестве P значений аргумента, понимая под G график $C(p)$ на P. Одновременно рассмотрим свойство строгой квазимонотонности

$$\min \{ p\,(C(p) - C(q)\,),\ q(C(q) - C(p)\,) \} < 0 \tag{26}$$

при всех $p, q \in P$, $p \neq q$. Для моделей равновесия из [2, 3] неравенство (26) обеспечивает единственность равновесных цен, а выполнение (25) вместе со строгой выпуклостью технологии влечет за собой единственность равновесных выпусков *.

В дальнейшем предполагается, что $C(p)$ определена на открытом выпуклом множестве $P \subset R_+^n$, принимает значения из R_+^n , дифференцируема на P и удовлетворяет бюджетному тождеству

$$pC(p) = \beta, \tag{27}$$

где β — константа.

Лемма 2. *Функция $C(p)$ строго квазимонотонна тогда и только тогда, когда для всякого $p_0 \in P$ найдется окрестность $P_0 \ni p_0$ такая, что при $p = p_0$ и любом $q \in P_0 \setminus \{p_0\}$ выполняется неравенство* (26).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна. Для проверки достаточности предположим, что (26) нарушается при некоторых $p, q \in P$, $p \neq q$. В силу (27) это означает, что

$$\max \{ pC(q),\ qC(p) \} \le \beta. \tag{28}$$

Пусть $r = {}^1/_2\,(p+q)$. Из (28) и (27) получим

$$\max \{ qC(r),\ pC(r) \} \le \beta. \tag{29}$$

Используя (27) в точке r, будем иметь

$$\min \{ qC(r),\ pC(r) \} \le \beta. \tag{30}$$

* В [4] условие (26) отождествляется со слабой аксиомой выявленного предпочтения, что не вполне точно. Согласно обычной трактовке, эта аксиома требует выполнения (26) лишь при $C(p) \neq C(q)$, а не при $p \neq q$ (см., например, [1, стр. 317]).

Из (29) и (30) следует, что по крайней мере одна из пар (p, r), (r, q) удовлетворяет неравенству вида (28) и для нее можно провести аналогичное построение. Таким образом, получим последовательность вложенных отрезков, сходящуюся к общей для них точке r_0. Очевидно, никакая окрестность r_0 не удовлетворяет условию леммы 2. Требуемое противоречие получено.

Отметим, что для квазимонотонных функций справедливо совершенно аналогичное утверждение.

Введем обозначение

$$Z(p) = \{ z \mid z^{\mathrm{T}} \in R^n,\ zC(p)=0,\ z\neq 0 \}, \tag{31}$$

и пусть $H(p)$ — матрица Якоби отображения $C(p)$.

Теорема 2. *Если для любого $p\in P$ и $z\in Z(p)$ выполняется неравенство $zH(p)z^{\mathrm{T}}<0$, то функция $C(p)$ строго квазимонотонна. Если $C(p)$ квазимонотонна и $C(p)\neq 0$ на P, то $zH(p)\, z^{\mathrm{T}}\leq 0$ при всех $p\in P$, $z\in Z(p)$.*

Доказательство. Используя (27), перепишем (26) в эквивалентном виде

$$\min \{ (p-q)C(p),\ (q-p)C(q) \} < 0. \tag{32}$$

Пусть $q=p+z$. Согласно (32) и лемме 2, для доказательства строгой квазимонотонности $C(p)$ достаточно проверить, что для для каждого p при малых z имеет место неравенство

$$\min \{-zC(p),\ zC(p+z) \} < 0. \tag{33}$$

Пусть p фиксировано и $zH(p)z^{\mathrm{T}}<0$ при $z\in Z(p)$. Тогда существуют константы $\alpha, \delta>0$ такие, что из $|zC(p)|\leq\alpha\|z\|$* следует $zH(p)z^{\mathrm{T}}\leq -\delta\|z\|^2$. Поэтому в случае, когда $-\alpha\|z\|\leq zC(p)\leq 0$, получим

$$zC(p+z)=zC(p)+zH(p)z^{\mathrm{T}} +o(\|z\|^2) \leq -\delta\|z\|^2 +o(\|z\|^2),$$

и при малых z неравенство (33) выполняется. Если $zC(p)<-\alpha\|z\|$, то $zC(p+z)<-\alpha\|z\|+o(\|z\|)$, что опять влечет за собой (33) при z, лежащих в некоторой окрестности нуля. Наконец, в случае $zC(p)>0$ справедливость (33) очевидна. Первое утвепждение доказано.

Допустим теперь, что $C(p)$ квазимонотонна, но $zH(p)z^{\mathrm{T}} >0$ для некоторых $p\in P$ и $z\in Z(p)$. Тогда найдется число $t>0$ такое, что

$$zC(p+tz) =tzH(p)\, z^{\mathrm{T}}+o\,(t) >0,$$

а следовательно, существует вектор z_0 (близкий к tz), удовлетворяющий неравенствам $z_0C(p)<0$, $z_0C(p+z_0)>0$. Полагая $q=p+ z_0$, получаем

$$\min \{ (p-q)C(p),\ (q-p)C(q) \} > 0,$$

что в силу (27) противоречит квазимонотонности. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Карлин*. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
2. *М. Е. Примак*. Об одной общей равновесно-оптимальной задаче и некоторых моделях экономики. Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 3.

* $\|\ \|$ — евклидова норма.

3. *В. М. Полтерович*. Об устойчивости некоторых процессов распределения фондов и регулирования цен. В сб. Математическая экономика и функциональный анализ. М., «Наука», 1974.
4. *В. М. Полтерович*. Модели равновесного экономического роста. Экономика и матем. методы, 1976, т. XII, вып. 3.
5. *М. Е. Примак*. Об одном вычислительном процессе отыскания точек равновесия. Кибернетика, 1973, № 1.
6. *Е. Г. Гольштейн*. Метод модификации монотонных отображений. Экономика и матем. методы, 1975, т. XI, вып. 6.
7. *Дж. Ортега, В. Рейнболдт*. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., «Мир», 1975.
8. *Е. Е. Слуцкий*. К теории сбалансированного бюджета потребителя. В сб. Народно-хозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., Изд-во АН СССР, 1963.

Поступила в редакцию
20 VIII 1976